

Situació d'aprenentatge¹

Títol	La correspondència entre Pascal i Fermat i el problema dels punts (1654)
Curs (nivell educatiu)	Tercer o quart d'ESO
Matèria ²	Matemàtiques

¹ Les situacions d'aprenentatge són els escenaris que l'alumnat es troba a la vida real i que els centres educatius poden utilitzar per desenvolupar aprenentatges. Plantegen un context concret, una realitat actual, passada o previsible en el futur, en forma de pregunta o problema, en sentit ampli, que cal comprendre, i a la qual cal donar resposta o sobre la qual s'ha d'intervenir. És en la seva resolució que l'alumnat assoleix les competències. [Annex 5. Aprenentatge basat en situacions](#). Són propostes pedagògiques orientades al desenvolupament de les competències.

² A l'educació primària fem referència a les àrees i a l'educació secundària obligatòria i el batxillerat a les matèries.

DESCRIPCIÓ (context + repte)

Per què aquesta situació d'aprenentatge? Està relacionada amb alguna altra? Quin és el context?³ Quin repte planteja?⁴

El repte que es planteja és com s'han de repartir els diners que s'han apostat en una partida que per algun motiu no s'ha pogut concloure.

Durant almenys tres segles (XV, XVI i XVII) aquest problema va ser un problema estàndard en els textos matemàtics. Utilitzar-lo com a leitmotiv d'aquesta situació d'aprenentatge té el valor que descriu una situació real i a la vegada dona peu que l'alumnat faci una petita recerca sobre com s'ha resolt en diferents èpoques i quan es va donar el problema per "tancat" des del punt de vista de la comunitat matemàtica.

A partir d'aquest problema, que els i les alumnes poden resoldre de diferents maneres i arribant a diferents solucions, s'analitza i s'enllaça amb la història de la probabilitat, a través d'una petita recerca i amb alguns documents de referència. Amb aquesta activitat es pretén motivar la necessitat d'introduir els sabers relacionats amb una part del sentit estocàstic del currículum de 1r a 3r de Matemàtiques.

Al llarg de la situació d'aprenentatge el problema dels punts és el fil conductor de moltes de les activitats d'aprenentatge introduïdes i a la vegada és la primera activitat de la fase d'aplicació. Amb els nous aprenentatges es poden entendre els diferents plantejaments i resolucions del problema i es veu la matemàtica com una ciència en evolució.

³ Context: conjunt de circumstàncies que expliquen un esdeveniment o una situació i que envolten un individu, un col·lectiu o una comunitat, etc.

⁴ Un repte és un desafiament que sorgeix d'una pregunta, un problema, un cas, una polèmica, una recerca, un encàrrec, un projecte, un servei..., situat en un context. Resoldre'l implica mobilitzar sabers i connectar accions a partir dels quals es desenvolupen capacitats personals.

COMPETÈNCIES ESPECÍFIQUES

Amb la realització d'aquesta situació d'aprenentatge s'afavoreix l'assoliment de les competències específiques següents:

Competències específiques	Matèria
C2. Argumentar la idoneïtat de les solucions d'un problema, avaluant les respostes obtingudes a través del raonament i la lògica matemàtica, per verificar la seva validesa i generar noves preguntes i reptes.	Matemàtiques
C6. Vincular i contextualitzar les matemàtiques amb altres àrees de coneixement, interrelacionant conceptes i procediments, per resoldre problemes i desenvolupar la capacitat crítica, creativa i innovadora en situacions diverses.	Matemàtiques
C7. Comunicar i representar, de forma individual i col·lectiva, conceptes, procediments i resultats matemàtics usant el llenguatge oral, escrit, gràfic, multimodal i la terminologia matemàtica apropiada, per donar significat i permanència a les idees matemàtiques.	Matemàtiques
C9. Desenvolupar destreses socials, com la cooperació, participant activament en equips de treball inclusius reconeixent la diversitat i el valor de les aportacions dels altres, per compartir i construir coneixement de matemàtic de manera col·lectiva.	Matemàtiques

TRACTAMENT DE LES COMPETÈNCIES TRANSVERSALS⁵

Competència digital

- Fa cerques avançades a Internet atenent a criteris de validesa, qualitat, actualitat i fiabilitat, seleccionant-les de manera crítica i arxivant-les per recuperar, referenciar i reutilitzar aquestes recerques amb respecte a la propietat intel·lectual.
- Gestiona i utilitza el seu propi entorn personal digital d'aprenentatge permanent per construir nou coneixement i crear continguts digitals, mitjançant estratègies de tractament de la informació i l'ús de diferents eines digitals, seleccionant i configurant la més adequada en funció de la tasca i de les seves necessitats en cada ocasió.

Competència personal, social i d'aprendre a aprendre

- Reconeix i respecta les emocions i experiències dels altres, participa activament en el treball en grup, assumeix les responsabilitats individuals assignades i utilitza estratègies cooperatives dirigides a la consecució d'objectius compartits.
- Comprèn proactivament les perspectives i les experiències dels altres i les incorpora al seu aprenentatge per participar en el treball en grup distribuint i acceptant tasques i responsabilitats de manera equitativa i emprant estratègies cooperatives.
- Fa autoavaluacions sobre el seu procés d'aprenentatge, buscant fonts fiables per validar, sustentar i contrastar la informació i per obtenir conclusions rellevants.
- Planifica objectius a mitjà termini i desenvolupa processos metacognitius de retroalimentació per aprendre dels seus errors en el procés de construcció de coneixement.

Competència ciutadana

- Comprèn i analitza problemes ètics fonamentals i d'actualitat, en particular els relacionats amb les apostes i els jocs, considerant críticament els valors propis i aliens, i desenvolupant els seus propis judicis per afrontar la controvèrsia moral amb actitud dialogant, argumentativa i respectuosa

Competència emprenedora

- Desenvolupa el procés de creació d'idees i solucions valuoses i pren decisions, de manera raonada, utilitzant estratègies àgils de planificació i gestió i reflexionant sobre el procés realitzat i el resultat obtingut, per dur a terme el procés de creació d'informació adreçada a altres grups, considerant l'experiència com una oportunitat per aprendre.

⁵ Les competències transversals són: competència ciutadana; competència emprenedora; competència personal, social i d'aprendre a aprendre; i competència digital.

OBJECTIUS D'APRENENTATGE I CRITERIS D'AVALUACIÓ

Objectius d'aprenentatge⁶ Què volem que aprengui l'alumnat i per a què? CAPACITAT + SABER + FINALITAT	Criteris d'avaluació⁷ Com sabem que ho ha après? ACCIÓ + SABER + CONTEXT
1. Reconèixer situacions de la vida real en les quals intervé la incertesa, modelitzar-les i utilitzar les eines del càlcul de probabilitats per resoldre-les (Matemàtiques, CE6).	1. A partir d'una situació en què intervé la incertesa identificar l'espai mostral i assignar probabilitats als successos elementals i als successos que intervenen en la situació plantejada per tal de resoldre el problema (CA 6.1).
2. Identificar en quina situació històrica i en quin context es plantegen i es resolen els problemes relacionats amb el càlcul de probabilitats per valorar les matemàtiques com a ciència oberta i en desenvolupament (Matemàtiques, CE6).	1. Cercar, interpretar i processar informació amb sentit crític de forma individual i col·lectiva per construir nou coneixement amb relació a la història de la probabilitat (CA 6.3).
3. Argumentar la idoneïtat de les solucions d'un problema de probabilitats, avaluant les respostes obtingudes a través del raonament per verificar la seva validesa i generar noves preguntes i reptes (Matemàtiques, CE2).	1. Construir i expressar amb coherència idees i raonaments que permetin justificar la validesa de les solucions, processos i conclusions dels resultats obtinguts (CA 2.1). 2. Generar nous problemes que es resolguin mitjançant el càlcul de probabilitats.
4. Comunicar i representar els processos seguits en la resolució d'un repte o problema per estructurar el pensament propi i col·laborar en la construcció del coneixement del grup (Matemàtiques, CE7).	1. Comunicar de manera organitzada, utilitzant el llenguatge de les probabilitats (atzar, experiment aleatori, espai mostral, esdeveniment elemental, esdeveniment compost), els raonaments i procediments utilitzats per resoldre els problemes (CA 7.1). 2. Representar les resolucions mitjançant taules de doble entrada o diagrames d'arbre (CA 7.2).
5. Desenvolupar destreses socials, com la cooperació, participant activament en equips de treball inclusius i reconeixent la diversitat i el valor de les aportacions dels altres, per compartir i construir coneixement, amb relació al sentit estocàstic i el càlcul de probabilitats, de manera col·lectiva (Matemàtiques, CE9).	1. Col·laborar activament amb els altres, arribant a acords i complint-los, per assolir els objectius del grup relatius a la construcció del sentit estocàstic, valorant l'èxit col·lectiu com una estratègia de millora personal (CA 9.2). 2. Ajudar a identificar errors i dificultats d'aprenentatge de les companyes i companys fent aportacions constructives i concretes que puguin ajudar a superar-los i a millorar (CA 9.4).

⁶ Les competències específiques estan formulades de forma general i convé concretar-les per definir quins seran els aprenentatges que s'adquiriran amb la realització de la situació d'aprenentatge. Aquesta concreció ha de permetre formular unes competències pròpies de la situació d'aprenentatge que són l'equivalent dels objectius d'aprenentatge.

⁷ Els criteris d'avaluació es poden desplegar en indicadors. Un objectiu d'aprenentatge pot relacionar-se amb un, dos o més criteris d'avaluació.

SABERS

Amb la realització d'aquesta situació d'aprenentatge es tractaran els sabers següents:

	Saber	<u>Matèria</u>
1	Assignació de la probabilitat a partir de l'experimentació i el concepte de freqüència relativa (sentit estocàstic, predictibilitat i incertesa).	Matemàtiques
2	Anàlisi de l'origen de la teoria de la probabilitat (Fermat i Pascal) en el context dels jocs d'atzar (sentit estocàstic, predictibilitat i incertesa).	Matemàtiques
3	Assignació de probabilitats mitjançant la regla de Laplace (sentit estocàstic, predictibilitat i incertesa).	Matemàtiques
4	Assumpció de responsabilitats i participació activa per optimitzar el treball en equip (sentit socioemocional, treball en equip i presa de decisions).	Matemàtiques
5	Ús d'estratègies de gestió i presa de decisions adequades per resoldre situacions pròpies del treball en equip (sentit socioemocional, treball en equip i presa de decisions).	Matemàtiques

DESENVOLUPAMENT DE LA SITUACIÓ D'APRENTATGE

Quines són les principals estratègies metodològiques que es preveuen utilitzar? Quins tipus d'agrupament realitzarem? Quins són els principals materials que necessitarem? Etc.

El treball a l'aula durant la situació d'aprenentatge serà en grups cooperatius. El professor o professora organitza els grups a partir del coneixement que té del seu alumnat, de manera que els grups siguin heterogenis pel que fa a capacitats i rendiment de l'alumnat a l'aula de matemàtiques. També pot optar per demanar per escrit de forma individual a cada alumne amb qui vol treballar i amb qui no, fent-ho justificar, i construir els grups creuant tota aquesta informació.

Es lliura als alumnes un dossier de treball (en paper o digital) a l'inici de la situació d'aprenentatge on s'inclouen les activitats proposades i el temps previst per fer-les (una o dues sessions, segons l'activitat). Els i les alumnes disposen d'ordinador i de fulls per escriure i fer esquemes, guions de treball, resolucions.

Tothom ha d'escriure i tenir les activitats resoltes a la seva carpeta, en paper o en digital, però en el dia a dia va escrivint en paper, només en una segona fase l'alumnat puja esquemes, procediments i resolució al format digital.

En iniciar cada tipus d'activitat (inicial, desenvolupament, estructuració i aplicació) el professor o professora fa una petita explicació a tota la classe introduint les activitats proposades i el temps que s'hi dedica per fer-ho. El professor o professora no llegeix els enunciats de les activitats, ni diu com s'han de fer, són els i les alumnes que ho han de llegir i decidir entre tot el grup com ho faran. El professor o professora acompanya, fent preguntes per fer pensar el grup quan el grup queda "encallat", no dóna instruccions concretes. No validar o corregeix propostes de treball, són processos que ha de muntar cada grup.

Quan molts grups estan "encallats" en un mateix punt el professor o professora fa les preguntes i reflexions a tota la classe per promoure que algun grup trobi el desllorigador i pugui compartir-ho amb els altres grups, si és el cas.

Si és possible, cada sessió de treball es tanca fent una petita roda dels grups en què cada grup diu de forma breu en públic què ha fet en aquella sessió. Això fa que tothom, alumnat i professorat, prengui consciència de per a què ha servit la classe i què ha fet cadascú. Si no es pot fer a cada sessió, s'ha d'intentar fer-ho cada dues com a mínim.

ACTIVITATS D'APRENTATGE I D'AVUACIÓ

Activitat	Descripció de l'activitat d'aprenentatge i d'avaluació	Temporització
Activitats inicials <i>Què en sabem?</i>	Activitat 1 El problema dels punts Resolució per grups. Explicació de cada grup als altres. Es poden donar dues possibles solucions considerant: a) Els punts que té cada equip. b) Els punts que li falten a cada equip per guanyar i les diferents situacions que s'haurien pogut donar si continuessin jugant.	2 sessions: - 1 per fer - 1 per compartir
Activitats de desenvolupament <i>Aprenem nous sabers</i>	Activitat 2 <i>Com ho han resolt altres persones?</i> En aquesta activitat s'analitzen dues resolucions del problema, una feta per Fermat i l'altra per Pascal . Què estan fent, com es pot interpretar el que fan? Dóna idees sobre com resoldre problemes semblants? L'alumnat ha d'enunciar problemes semblants que es puguin resoldre amb la mateixa estratègia. Activitat 3 Qui eren Fermat i Pascal? Cal cercar informació sobre qui eren, quan van viure i a què es dedicaven Fermat i Pascal. Es crea un document conjunt en què cada grup fa la seva aportació indicant-ne les fonts. Uns grups busquen sobre Fermat i els altres sobre Pascal. Cal donar pautes clares als alumnes sobre què vol dir cercar informació, citar les fonts, filtrar la informació i quedar-se amb el que realment s'entén i és rellevant per al tema. També cal dir-los que si troben informació que els sembla rellevant però no l'entenen, la recullin i ho preguntin al professor o professora. Documents de suport per al professorat: Història de l'Estadística i la Probabilitat (Josep Pla Carrera, 2023). Els inicis de la teoria de probabilitats (Fatima Romero Vallhonestà i Maria Rosa Massa-Esteve, 2020)	2 sessions: - 1 per analitzar - 1 per inventar altres situacions equivalents 2 sessions: - 1 de cerca - 1 de posada en comú i validació crítica

Activitat	Descripció de l'activitat d'aprenentatge i d'avaluació	Temporització
	<p>Activitat 4 <i>Freqüència i probabilitat què és? Quina relació tenen?</i></p> <p>L'activitat consisteix en llançar un dau i una maquineta 100 vegades i apuntar què surt; cal ampliar la recollida de dades amb els resultats dels diferents grups per poder introduir la diferència entre freqüència relativa i probabilitat.</p> <p>Com a conclusió d'aquesta activitat, es construeix el concepte de freqüència, probabilitat i successos equiprobables (identificar l'equiprobabilitat del problema dels punts).</p> <p>Observacions: Les activitats 4, 5, 6 i 7 provenen del dossier enllaçat.</p> <p>Activitat 5 <i>El llenguatge de les probabilitats</i></p> <p>Diverses qüestions per introduir les nocions de: atzar, experiment aleatori, espai mostral, esdeveniment elemental, esdeveniment compost.</p> <p>Activitat 6 <i>Assignació de probabilitats a un esdeveniment</i></p> <p>Diverses qüestions adreçades a establir la regla de Laplace.</p> <p>Activitat 7 <i>Construcció de taules de doble entrada i de diagrames d'arbre per assignar probabilitats.</i></p> <ul style="list-style-type: none">- Assignació de probabilitats a partir d'una taula de doble entrada.- Construcció de taules de doble entrada a partir d'un problema.- Quan és útil aquest recurs i quan no?- Construcció de diagrames d'arbre. <p>Assignació de probabilitats en un diagrama d'arbre.</p>	<p>1 sessió</p> <p>1 sessió</p> <p>1 sessió</p> <p>2 sessions</p>

Activitat	Descripció de l'activitat d'aprenentatge i d'avaluació	Temporització
<p>Activitats d'estructuració <i>Què hem après?</i></p>	<p>Activitat 8 <i>Concurs de resolució de problemes de probabilitats</i> (3 fases)</p> <p>En una primera sessió, els i les alumnes plantegen problemes per als altres grups i construeixen els criteris d'avaluació.</p> <p>En la segona sessió, els grups s'intercanvien problemes i els resolen.</p> <p>En la tercera sessió, cada grup avalua les respostes dels altres companys als problemes que ells havien plantejat.</p> <p>En aquest procés, cada grup, en plantejar el problema i els criteris d'avaluació, identifica quins sabers es requereixen per resoldre cadascun dels problemes que ha plantejat. En la segona sessió, cada grup posa en joc els seus aprenentatges per resoldre els problemes que li proposen altres grups. En la tercera sessió, els "correctors" han de comparar les produccions alienes amb les pròpies que havien fet a la primera sessió.</p>	<p>3 sessions</p> <ul style="list-style-type: none"> - 1 per plantejar - 1 per resoldre problemes d'altres - 1 per avaluar les produccions dels altres
<p>Activitats d'aplicació <i>Apliquem el que hem après</i></p>	<p>Activitat 9 <i>Què feien Fermat i Pascal?</i></p> <p>Tornar a analitzar les dues resolucions del problema, <i>una feta per Fermat i l'altra per Pascal</i>, amb les eines del càlcul de probabilitats.</p> <p>Activitat 10 <i>El problema de les tres portes</i></p> <p>Jugar, pensar què passa, com es pot modelitzar i analitzar el problema de les tres portes amb el llenguatge de les probabilitats?</p> <p>Material de suport per al professorat:</p> <ul style="list-style-type: none"> - <i>El problema de les tres portes</i> (Viquipèdia). - <i>Estadística para todos. El problema de las 3 puertas.</i> <p>Activitat 11 <i>Cerca i comunicació de problemes</i> que es poden resoldre a través del sentit estocàstic, en particular la predictibilitat i la incertesa.</p>	<p>1 sessió</p> <p>1 sessió</p> <p>2 sessions:</p> <ul style="list-style-type: none"> - 1 per cercar - 1 per presentar

BREU DESCRIPCIÓ DE COM S'ABORDEN ELS VECTORS⁸ EN AQUESTA SITUACIÓ D'APRENTATGE

1. Aprenentatges competencials.

La situació d'aprenentatge s'inicia amb un problema de la història de les matemàtiques (de la probabilitat) però que també es pot enunciar amb una situació propera a l'alumnat, un joc que s'interromp sense acabar i cal decidir com es reparteixen els premis. En el desenvolupament de la situació hi ha diverses activitats que promouen la cerca d'altres problemes i situacions en què es puguin aplicar els nous aprenentatges en situacions reals, fora de l'àmbit escolar.

3. Universalitat del currículum.

La universalitat és present en aquesta situació d'aprenentatge perquè parteix d'una realitat propera de l'alumnat buscant la seva motivació. A la vegada proporciona un entorn flexible en què tothom hi pot tenir cabuda. El fet de poder treballar amb altres companys i companyes duent a terme la mateixa tasca (i, per tant, tenir el seu suport) s'orienta al fet que tothom pugui aprendre en aquesta situació.

4. Qualitat de l'educació de les llengües.

Una de les competències seleccionades per treballar en aquesta situació d'aprenentatge és la competència específica 7: Comunicar i representar, de forma individual i col·lectiva, conceptes, procediments i resultats matemàtics usant el llenguatge oral, escrit, gràfic, multimodal i la terminologia matemàtica apropiada, per donar significat i permanència a les idees matemàtiques. En aquest sentit, es treballa a fons la qualitat de l'educació de les llengües.

5. Benestar emocional.

Una altra de les competències per treballar en aquesta situació d'aprenentatge és la competència específica 9: Desenvolupar destreses socials, com la cooperació, participant activament en equips de treball inclusius i reconeixent la diversitat i el valor de les aportacions dels altres, per compartir i construir coneixement de matemàtic de manera col·lectiva. Aquesta competència està íntimament relacionada amb el benestar emocional.

⁸ 1. Aprenentatges competencials. 2. Perspectiva de gènere. 3. Universalitat del currículum. 4. Qualitat de l'educació de les llengües. 5. Benestar emocional. 6. Ciutadania democràtica i consciència global.

MESURES I SUPORTS UNIVERSALS⁹

La situació d'aprenentatge inclou un conjunt de mesures i suports per tal de facilitar l'aprenentatge a tot l'alumnat:

El treball en grup permet al professor o professora observar les aportacions que fa cada noi i noia per resoldre les activitats proposades i acompanyar amb bones preguntes i suggeriments l'avenç del grup i de cadascun dels i les alumnes.

Aquesta manera de treballar facilita la col·laboració entre alumnes tant en la fase de desenvolupament com en la d'aplicació, de forma que l'alumne o alumna sempre disposa de la possibilitat de suport entre iguals, a banda de l'acció del docent.

MESURES I SUPORTS ADDITIONALS¹⁰ O INTENSIVS¹¹

Quines mesures o suports addicionals o intensius es proposen per a cadascun dels alumnes següents:

Alumne/a	Mesura i suport addicional o intensiu

⁹ Les mesures i els suports universals són els que s'adrecen a tot l'alumnat. Han de permetre flexibilitzar el context d'aprenentatge, proporcionar als alumnes i als docents estratègies per minimitzar les barreres d'accés a l'aprenentatge i a la participació que es troben a l'entorn, i garantir la convivència i el compromís de tota la comunitat educativa.

¹⁰ Les mesures i els suports addicionals s'adrecen a alguns alumnes. Permeten ajustar la resposta educativa de forma flexible, preventiva i temporal, focalitzant la intervenció educativa en aquells aspectes del procés d'aprenentatge que poden comprometre l'avenç personal i escolar.

¹¹ Les mesures i els suports intensius són específics per als i les alumnes amb necessitats educatives especials, estan adaptats a la seva singularitat i permeten ajustar la resposta educativa de forma extensa, amb una freqüència regular i, normalment, sense límit temporal.