



PATRONS DE REPETICIÓ I DE CREIXEMENT

Propostes per al desenvolupament del sentit algebraic

Competències

A través dels patrons, es desenvolupen habilitats imprescindibles per a les matemàtiques i per la vida: estructurar el pensament, ordenar l'entorn, fer prediccions i generalitzar, captar allò important i transferir-ho a altres situacions, i desenvolupar els altres sentits matemàtics.



Sabers

Es promouen diversos sabers associats al pensament, recursiu, relacional i funcional, que són els tres tipus de pensament algebraic: recerca de regularitats, predicció i generalització; creació de patrons recurrents a partir de regularitats; aplicació d'estratègies d'identificació, representació i predicció raonada de termes a partir de les regularitats.



Autoria

Àngel Alsina
Ester Bosch



Etapa, nivell

5è
d'educació primària



Temporització

Tres sessions d'una hora
(una per trimestre)



Agrupament

Variable segons
el moment de la sessió



Material

Policubs. Mosaics geomètrics.
Calculadora

Primera sessió

PATRONS DE REPETICIÓ

La primera part d'aquesta sessió té com a objectiu consolidar els aspectes bàsics que ja s'han treballat a CM (diferència entre patró i sèrie, descripció simbòlica del patró, comptatge d'elements de cada mòdul, importància d'utilitzar taules per visualitzar el recompte, fer prediccions senzilles...) i a continuació aprofundir en la predicció i la generalització.

Depenent del treball realitzat a CM els punts 1 i 2 es poden reduir.

1. Observem patrons. Diferència entre sèrie i patró

S'inicia generant un diàleg amb tot el grup, a partir de la presentació de diverses imatges de l'entorn en les quals es poden identificar patrons de repetició AB, AAB o ABB,...



Per promoure el diàleg, es plantegen preguntes com per exemple:

- Què observeu a les fotografies?
 - Hi ha coses/elements que es repeteixen? Com es repeteixen?
- Tots es repeteixen de la mateixa manera?

Durant la conversa a l'aula anirem introduint nocions com sèrie, patró, unitat de repetició o mòdul, etc.

2. Analitzem el patró i el representem

2.1 Després de detectar les sèries amb determinats patrons de repetició es proposa que per parelles creïn amb polícubs els mateixos patrons que observen a les fotografies. Per exemple, per reproduir la sèrie balcó-balcó-mirador (AAB):



2.2 Diàleg en gran grup guiat per preguntes orientades perquè s'adonin que, malgrat usar colors diferents, el patró és el mateix i es pot representar icònicament o simbòlicament:

- Quins colors heu fet servir per fer la *sèrie* balcó-balcó-mirador? Tothom ha utilitzat els mateixos colors? Encara que siguin colors diferents, el *patró* és el mateix? Quin és? Com el podeu representar?

2.3 Es demana que classifiquin els patrons que són iguals i que els representin simbòlicament.

En aquesta activitat potser caldrà proporcionar alguna bastida com a mesura d'inclusió:

- Si algun alumne mostra dificultat en la cerca de patrons iguals, però representats en colors diferents es poden utilitzar diferents ritmes per simbolitzar colors diferents (picar de mans, colpejar genolls...) per observar que el patró és el mateix.
- Per afavorir la representació del patró cal prescindir de llaips de colors i oferir només un retolador/llapis negre per entendre realment el que volem representar.
- Es respectaran i valoraran totes les representacions que fan els alumnes (símbols, elements pintats/no pintats...) però es vetllarà que també aparegui alguna representació simbòlica amb lletres. En el cas que aquest tipus de representació no surti cal introduir-la.

3. Comptem, registrem, fem prediccions i generalitzem

3.1 Els alumnes es tornen a agrupar per parelles i escullen una sèrie de policubs (per exemple, amb un patró de repetició AAB com el que es mostra en la imatge de sota) i fixem l'atenció en el primer mòdul, per tal que s'adonin que està compost per tres policubs: negre, negre i blanc respectivament. Una vegada s'ha determinat que aquesta és la *unitat de repetició*, es plantegen algunes qüestions per promoure que facin conjectures i les argumentin posteriorment, com ara: de quin color serà la peça que ocupa el lloc número 15? i el 17? i el 30?



Aquest procés ha d'anar acompanyat de bones preguntes per potenciar que siguin els alumnes els que ho descobreixin i s'adonin que per analitzar la regularitat del patró és convenient fer una taula. La construcció de la taula també forma part del repte i no cal avançar-los quins són els elements a analitzar en cada columna.

Un exemple de taula podria ser:

	POLICUBS NEGRES	POLICUBS BLANCS	POLICUBS EN TOTAL
MÒDUL 1	2	1	3
MÒDUL 2	4	2	6
MÒDUL 3	6	3	9
.../...			
MÒDUL 10	?	?	?
MÒDUL n	2n	n	3n*

*(o el triple de n o la suma dels blancs i negres)

Per promoure la predicció i la generalització, es plantegen les següents preguntes:

- Què observes a cada mòdul?
- Què canvia si observem dos mòduls?
Descobreixes algun patró?
- Les descobertes que has fet es compleixen en els altres mòduls?
- Quants policubs negres hi hauria en 10 mòduls?
i blancs? i en total?
- Quants policubs negres hi hauria en 50 mòduls?
i blancs? i en total?

Finalment, per promoure que generalitzin, es fan algunes preguntes i explicacions per començar a introduir les lletres. Finalment, es demana: a) que expliquin amb paraules aquest procés d'abstracció; i b) que ho escriguin a la taula:

- Podem saber què passarà en qualsevol mòdul?
- I si no sabem quin número té aquest mòdul?

Després d'escoltar les seves respostes, s'explica que com que no sabem el número el podem expressar amb un terme general, que habitualment és la lletra «n». Arribats a aquest punt, es pot completar la taula fent-los aquesta pregunta:

- Quants policubs negres hi hauria en el mòdul n?
i blancs? i en total?

3.2. Aquesta descoberta canvia si realitzem la sèrie amb altres elements?



Es demana a l'alumnat que construeixi la mateixa sèrie treballada amb peces del geomosaic i es comprova que, malgrat que s'hagin usat elements diferents, el patró és el mateix i es pot representar icònicament o simbòlicament.

4- Activitat d'ampliació

I si el patró de repetició és AABB? i si ...? Feu les mateixes activitats amb altres unitats de patró.



Segona sessió PATRONS DE GIR

La finalitat d'aquesta segona sessió és evitar que els nens i nenes associïn la noció de patró de repetició només amb elements amb una determinada posició (alineats en fila horitzontal, etc.). Per això, es proposa una triple tasca amb un patró geomètric de gir. Aquest tasca, en definitiva, ha de servir perquè comprenguin que un patró és una regularitat predictable, on es combinen relacions numèriques, espacials o lògiques; i l'estructura, la forma interna en què els diversos elements d'una regularitat s'organitzen i relacionen.

1. Analitzem els girs observant imatges

Fem servir la tècnica:

Què observo? De què m'adono? Què em pregunto?



En un primer moment es preguntarà als alumnes què observen en la imatge (hi ha dos rellotges iguals però en diferent posició, hi ha els números de l'1 al 12 i dues busques, són rodons, entre els números hi ha ratlletes...). A continuació, la pregunta «De què t'adones?» els farà aprofundir en les qüestions anteriors (hem girat un quart de volta o 90° , la distància i posició entre els números no ha canviat, tots els números han girat igual, tots estan tombats cap a la dreta, l'angle que fan les busques continua mesurant el mateix però està en diferent posició...).

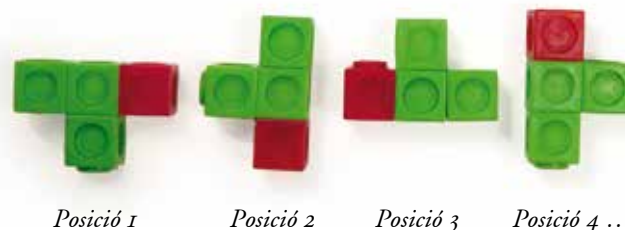
Un cop analitzat com es comporten els diferents elements d'un conjunt en un gir podem respondre la darrera qüestió: Què et preguntes? (Què passarà si el continuem girant? I si el girem cap a l'altre costat passarà el mateix? Com quedaran els números si girem mitja volta? i si fem una volta i mitja? I si el rellotge és diferent? Pot passar el mateix amb altres objectes?)

El mestre ha d'acompanyar aquesta activitat amb bones preguntes per afavorir que surtin bones apreciacions matemàtiques.

2. Copiem, interpolem i estenem el patró

Per tal de treballar l'habilitat d'abstreure o traduir, es presenta a tot el grup una sèrie construïda amb un patró geomètric de gir, amb policubs.

Com a la sessió inicial, se'ls demana que l'observin i se'ls plantegen algunes preguntes per tal que s'adonin dels elements que es repeteixen, com es repeteixen, quina relació guarden els elements entre ells, què canvia i què es manté...



Com es pot observar es proposa un model on un dels cubs sigui de color diferent per ser més conscients del gir realitzat i ajudar a verbalitzar-lo (el cub vermell és a la dreta, a baix, a l'esquerra i a dalt...).

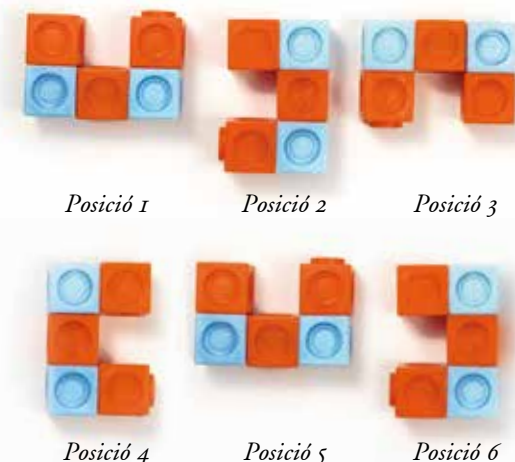
Cada grup d'alumnes construeix la primera peça amb policubs i per grups copiaran el patró, observant el gir que es fa cada vegada.

Per entendre bé la sèrie cal saber interpolar o completar i estendre la sèrie.

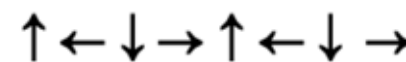
Per tant, es realitzaran manipulativament una sèrie d'activitats per treballar aquests aspectes (per exemple: un dels alumnes extraurà una de les peces i els altres hauran de tornar-la a posar en la posició correcta observant els altres elements, construir la peça que segueix, continuar la sèrie amb dues peces més...)

3. Identifiquem la unitat de repetició

Per treballar l'habilitat de reconèixer la unitat de repetició, es presenta a tot el grup una sèrie diferent de la de la tasca anterior, construïda també amb un patró geomètric de gir a partir de peces dels policubs. Després d'un temps curt d'observació, se'ls demana que, per parelles, discuteixin quin és el patró que es repeteix i que el representin en el paper.



Exemple de representació simbòlica



A continuació, s'obre un torn de diàleg i es plantegen les següents preguntes, per tal d'indagar si han estat capaços tant de descobrir la unitat de repetició com de representar-la.

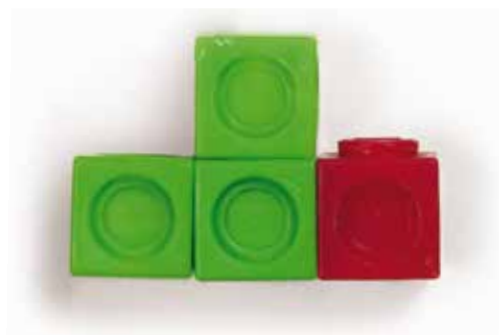
- Quantes vegades hem realitzat el gir fins a tornar a la posició inicial?
- En quina posició es torna a repetir el primer element?

- De quantes peces està composta la unitat de repetició?
- Pots predir quina figura hi haurà en la posició 8? I en la 10?
- Dibuixa la figura de la posició 17.

L'objectiu d'aquestes preguntes és que l'alumne dedueixi que la peça que marca el canvi de mòdul de la sèrie és l'última del patró (4a posició) i per tant cada 4 elements es tornarà a repetir (totes les posicions múltiples de 4). L'element de la posició 5 serà idèntica a la primera perquè la unitat de repetició torna a començar.

4. Inventar un patró

Per tal de treballar l'habilitat de crear, es demana a cada alumne que, de manera individual, creï una sèrie a partir d'un patró geomètric de gir. Després d'un temps d'uns 5 minuts aproximadament, s'obre un torn de diàleg perquè cada nen o nena expliqui els altres la sèrie que ha creat, amb quin patró, etc. Abans d'acabar, per documentar l'activitat, s'aconseja fer fotografies de les sèries i fer una creació amb totes (*collage*, animació, representació a partir dibuix, etc.) i exposar-la a la classe o bé al passadís.

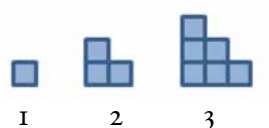


tercera sessió PATRONS DE CREIXEMENT

A cicle mitjà els patrons de creixement s'han treballat amb sèries de creixement regular constant.

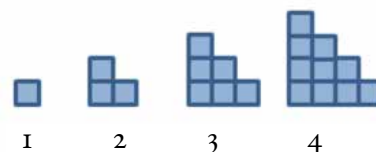
L'activitat que es proposa a 5è és per analitzar les regularitats variables (per passar d'un terme al següent es fa sumant un nombre que va canviant cada vegada).

1. Analitzem el patró i el continuem

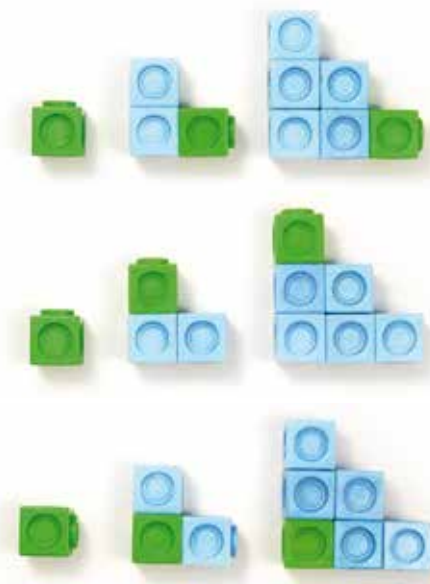


1.1 Observar el patró i construir amb policubs l'element que continua la sèrie.

Hi ha diferents maneres de deduir o justificar quina pot ser la peça següent. La posada en comú d'estratègies els pot fer adonar-se'n que hi ha diferents camins per arribar a la mateixa conclusió i que ben justificats tots són vàlids.

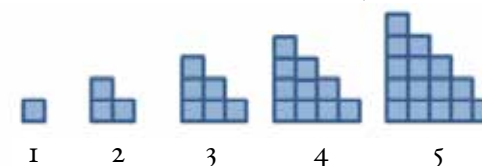


Una bona manera d'explicar com creix la figura és *colorificar* (codificar amb colors). Se'ls demana que en cada un dels elements canviïn de color el cub que representaria la peça 1.



En aquest exemple es pot observar que per fer l'element 3 hi ha alumnes que afegeixen un cub a cada fila i un a dalt, altres que afegeixen una fila a sota, altres una columna a l'esquerra, etc.

Un cop escoltades les diferents argumentacions es pot observar si totes continuen essent vàlides per construir l'element 4 i l'element 5.



1.2 Recollim en una taula el que observem.

MÒDUL	CUBS
1	1
2	3
3	6

Fem predicció de quants cubs tindrà el mòdul 5.

És important promoure que es facin conjectures i, guiant la conversa, aparegui la idea de la diferència de cubs entre un mòdul i el següent; pel que cal millorar la taula ampliant-la amb una altra columna.

Els alumnes poden observar que en cada pas se sumen tants cubs com indica el seu nombre de sèrie.

MÒDUL	CUBS	DIFERÈNCIA
1	1	
2	3	2
3	6	3
4	10	4

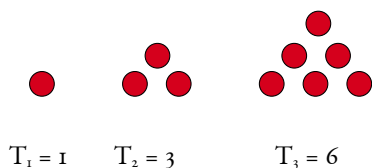
10		10

Es realitzaran previsions dels elements que hem afegit en un número de sèrie concret:

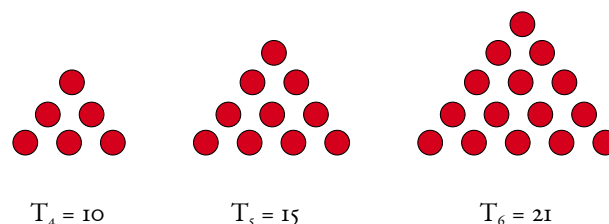
- Quants cubs caldrà afegir al mòdul 9 per construir el 10?
- I en el 23 per construir el 24?
- I en el mòdul n de la sèrie?

2. Descobrim els nombres triangulars

2.1 Es presenten els tres primers números triangulars i s'inicia un diàleg en grup per observar com creixen:

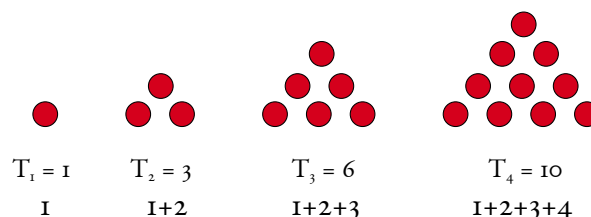


Seguidament, se'ls demana que, individualment, representin en un paper en blanc els següents dos números triangulars. Una vegada representats, es posen en comú les respostes i es promou que expliquin novament com van creixent els números.



2.2 Hi ha alguna relació amb el patró que hem treballat abans? Comprovem-ho amb la taula.

Un cop observat en la taula que segueix el mateix patró, es demana que ho representin simbòlicament, usant números:



$$\begin{aligned}
 &1 \\
 &1 + 2 = 3 \\
 &1 + 2 + 3 = 6 \\
 &1 + 2 + 3 + 4 = 10 \\
 &1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15 \\
 &1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21
 \end{aligned}$$

2.3 Podem predir quin serà el 15è nombre triangular? ($1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12+13+14+15$)

Per acabar, usant calculadora o el software oportú, es pot veure en grup com segueix la sèrie dels números triangulars.

Ampliació: Com podem sumar més ràpid els nombres consecutius?

AVALUACIÓ

Cal fer una avaluació de naturalesa competencial fixant-se, principalment, en tres competències específiques: raonament i prova, comunicació i representació, connexions. Per això, es poden fer servir rúbriques que determinin objectivament el nivell d'adquisició, com per exemple la publicada en aquest document, disponible en català al web del CREAMAT: ja.cat/competencia_rubrica

Alsina, Á., Abarca, M., y Grabulosa, I. (2020). «Evaluando la competencia matemática: construcción y validación de una rúbrica». *Números – Revista de Didáctica de la Matemática*, 105, 119-139.



CONNEXIONS

Les activitats amb patrons, en general, tenen múltiples aplicacions de naturalesa tant externa com interna. Aquestes aplicacions, la majoria de vegades,

afavoreixen les connexions [vegeu: Alsina et al. (en premsa)]

—Estructurar el pensament

Les rutines de pensament contribueixen a estructurar el coneixement seguint uns patrons determinats que s'adapten a les diferents situacions possibles, fet que facilita el pensament crític, creatiu i autònom. Això permet, per exemple, estructurar adequadament la informació per resoldre problemes reals de manera creativa i en el menor temps possible.

—Ordenar l'entorn

El funcionament humà, en un sentit ampli, pot estar regit per un entorn que oscil·la des del caos fins a l'ordre. Així, per exemple, organitzar l'entorn a partir de normes que segueixen determinats patrons, ofereix seguretat.

—Fer prediccions i generalitzar

Les prediccions i la generalització contribueixen a passar de mirar un patró com una seqüència d'«el que ve després» a analitzar la forma interna en què els diversos elements s'organitzen i relacionen. Això permet, en la vida real, predir certs comportaments i situacions (p. ex., la predicció del temps atmosfèric); i, en les matemàtiques, expressar algebràicament generalitzacions (funcions lineals i afins, a partir de patrons de repetició).

—Captar allò important i transferir-ho a altres situacions

Els patrons es basen en unitats que es repeteixen, que creixen o que s'ordenen de manera estructural o

simètrica. Identificar aquestes unitats (és a dir, abstracture el patró) comporta diferenciar la informació rellevant de la que no ho és, la qual cosa és determinant en múltiples situacions reals: en la resolució de problemes; per interpretar críticament el gran deversall de dades que provenen de diversos mitjans (televisió, premsa escrita, Internet, etc.).

—Desenvolupar el sentit numèric

Els patrons estan molt presents en diversos sabers, com els múltiples i submúltiples, en els criteris de divisibilitat, etc. Identificar els patrons que hi ha implícits en aquests sabers contribueix a comprendre'ls.

—Desenvolupar el sentit espacial

L'espai s'organitza a partir de punts de referència espacials, que al seu torn permeten establir seqüències espacials: en les tessellacions, les simetries... hi ha patrons. Reconèixer-los ajuda tant a orientar en l'espai com a estructurar-lo.

—Desenvolupar el sentit de la mesura (p. ex. el temps)

El temps s'organitza a partir de punts de referència temporals, que al seu torn permeten establir seqüències temporals: el que ha passat abans i el que passarà després.

—Desenvolupar el sentit estocàstic

El comportament de l'atzar segueix un patró que consisteix a estabilitzar la freqüència: p. ex., en llançar una moneda cinc vegades, poden sortir quatre cares i un creu; però si es fan 10000 llançaments, la tendència és obtenir la meitat dels llançaments cara

i l'altra meitat creu. Aquest patró de comportament de l'atzar es denomina Llei dels Grans Nombres.



RECURSOS

Applets

Es poden identificar propostes interessants a:

- VISUAL PATTERNS (www.visualpatterns.org)
presenta molts exemples de patrons per explorar amb els alumnes, per millorar el seu raonament algebràic (més concretament, per acostumar-se a buscar l'estructura).
- NRICH (nrich.maths.org)
pretén enriquir l'experiència matemàtica de tots els aprenents. Per donar suport a aquest objectiu, els membres de l'equip de NRICH treballen en una àmplia gamma de capacitats, com ara proporcionar desenvolupament professional per als professors que desitgen incorporar tasques matemàtiques riques a la pràctica diària de l'aula. NRICH forma part de la família d'activitats del Millennium Mathematics Project.
- ILLUMINATIONS (illuminations.nctm.org)
és un projecte dissenyat per l'Associació Nord-americana de Professors de Matemàtiques (NCTM, pel seu acrònim en anglès). La principal finalitat és afavorir l'accés a recursos basats en estàndards de qualitat per a l'ensenyament i l'aprenentatge de les matemàtiques, incloses eines interactives

per als alumnes i suport educatiu als mestres. En relació a les eines interactives per a alumnes, s'ofereixen una gran quantitat de miniaplicacions per a alumnes des dels 3 fins als 18 anys, organitzats en nivells d'acord amb el sistema educatiu americà (els corresponents a l'Educació primària són Pre-K-2, de 3 a 8 anys, i 3-5, de 9 a 11 anys), i segons els cinc estàndards de contingut matemàtic del NRIC: números i operacions, àlgebra, geometria, mesura i anàlisi de dades i probabilitat.

Referències bibliogràfiques de suport

- PINCHEIRA, N. i ALSINA, Á. (2021). «Hacia una caracterización del álgebra temprana a partir del análisis de los currículos contemporáneos de Educación Infantil y Primaria». *Educación Matemática*, 33 (1), 153-180. <https://doi.org/10.24844/EM3301.06>
- ALSINA, Á. (2020). «Itinerario de enseñanza para el álgebra temprana». *Revista Chilena de Educación Matemática*, 12 (1), 5-20. <https://doi.org/10.46219/rechiem.v12i1.16>

GLOSSARI

- Sèrie:** Conjunt ordenat d'elements que se succeeixen uns als altres relacionats d'alguna manera entre ells.
- Patró:** Regularitat previsible. Allò que determina la regularitat i marca l'estructura d'una sèrie.
- Mòdul:** Conjunt d'elements que formen una unitat a la sèrie.

ELEMENTS CURRICULARS

Competències específiques i criteris d'avaluació

Competència 3. Explorar, formular i comprovar conjectures senzilles, reconeixent el valor del raonament espacial, raonament lògic i incorporar l'argumentació per integrar i generar nou coneixement matemàtic.

Criteris d'avaluació. Analitzar conjectures matemàtiques senzilles investigant patrons, propietats i relacions, així com fent deduccions i comprovant-les.

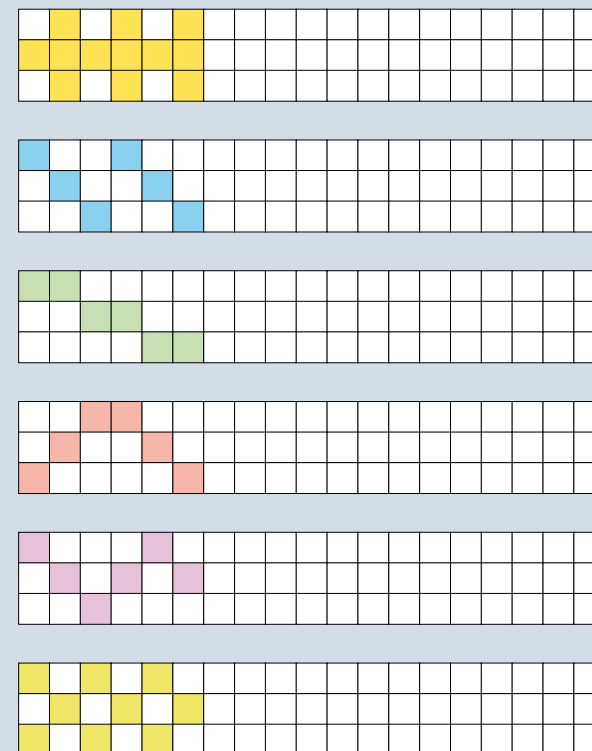
Competència específica 4. Utilitzar el pensament computacional descomponent en parts més petites, reconeixent patrons i dissenyant algorismes per solucionar problemes i situacions de la vida quotidiana.

Criteris d'avaluació. Trobar els principis que generen els patrons d'un problema descartant les dades irrelevantes tot identificant les parts més importants.

Sabers

Patrons

- Creació de sèries recurrents a partir de regularitats o d'altres patrons utilitzant números, figures o imatges.
- Aplicació d'estratègies d'identificació, representació (verbal, taules, gràfics i notacions inventades) i predicció raonada de termes a partir de les regularitats en una col·lecció de números, figures o imatges.



ÀNGEL ALSINA PASTELLS

Universitat de Girona, Càtedra de Didàctica
de les Matemàtiques M. Antònia Canals – GAMAR

ESTER BOSCH I CASAS

Escola Pompeu Fabra. Anglès
Mestra responsable del GAMAR