

Un tangram diferent

PERÍMETRE, ÀREA
I PITÀGORES

Guies
didàctiques
per a la millora
de la competència
matemàtica.
Secundària

NÚRIA SERRA BENEDICTO

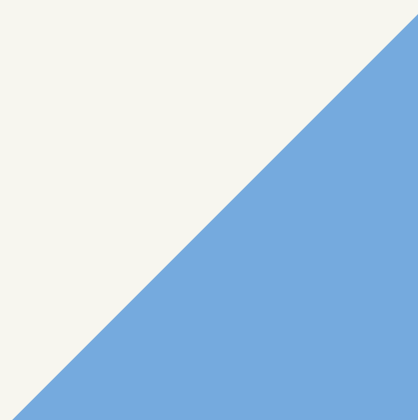
Descripció de l'activitat

El trencaclosques en què es basa la següent seqüència d'activitats és una joguina alemanya del 1899 i el seu interès rau en la tipologia de polígons de què està format. Originalment, estava fet de pedra i era el número 15 d'una col·lecció de diferents trencaclosques fabricats per l'empresa Richter. A l'època tenien molt èxit tant a Anglaterra com a l'Europa continental. Un exemple el trobem a la Primera Guerra Mundial, on soldats d'ambdós bàndols gaudien resolent els reptes proposats mentre estaven a les trinxeres. Podem considerar-los el cub de Rubik de l'època. Cap a la meitat del segle xx es van fabricar models fets amb fusta.



L'objectiu de la seqüència d'activitats és estudiar i classificar els diferents polígons que formen el tangram, tot deduint les mesures dels costats, per acabar fabricant-lo amb la col·laboració del professorat de tecnologia. Per poder fer-ho, l'alumnat necessitarà descobrir el Teorema de Pitàgores i aplicar-lo.

Per a l'alumnat,
enunciat/presentació
de l'activitat



Sessió 1

ACTIVITATS INICIALS

Activitat 1: Què observes i quines preguntes et venen al cap

Es lliura el full DIN A3 amb un dibuix del tangram de Van Hiele i també la informació del perímetre d'una de les peces. Cada grup ha d'anotar què observa i quines preguntes els suggereix la imatge. Després es fa una posada en comú en gran grup.

Activitat 2: Estudi del tangram de Van Hiele

Activitat que serveix per fer un repàs de conceptes bàsics de geometria plana, treballar la diferència entre perímetre i àrea i finalment planteja la necessitat de trobar la manera de calcular el tercer costat d'un triangle rectangle, coneixent-ne dos.

A cada grup se li donen les peces del tangram fetes de cartolina.

Sessió 2

ACTIVITAT DE DESENVOLUPAMENT

Activitat 3: Quadrats inclinats

Abans de repartir la fitxa de treball i els geoplans, es treballa amb el suport d'una presentació. Amb la fitxa, l'alumnat descobreix patrons que el porten a la fórmula del Teorema de Pitàgores.

Sessió 3

ACTIVITAT DE SÍNTESI I ESTRUCTURACIÓ

Activitat 4: Aplicant el Teorema de Pitàgores (1a part)

En aquesta activitat s'enuncia d'una manera formal el teorema i es donen exemples d'aplicació que l'alumnat haurà de reproduir.

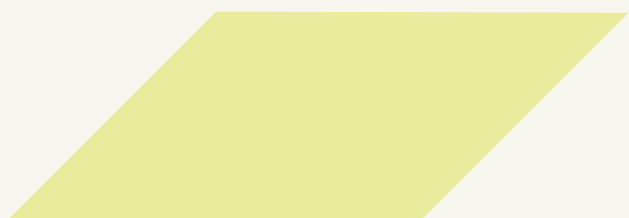
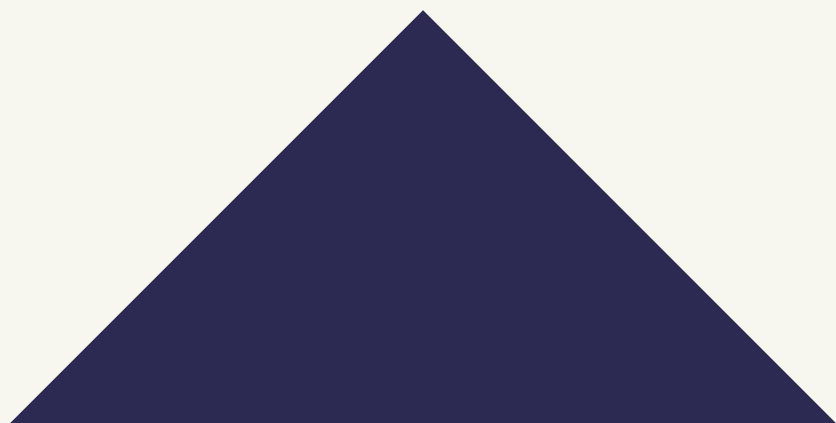
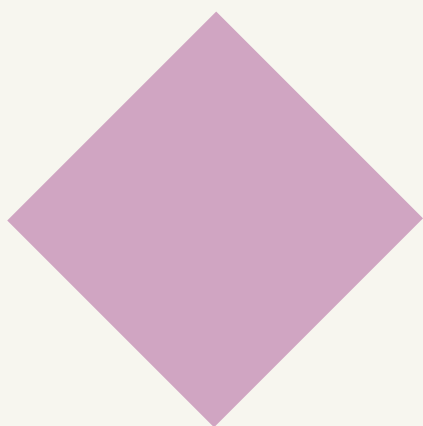
ACTIVITATS D'APLICACIÓ I TRANFERÈNCIA

Activitat 5: Aplicant el Teorema de Pitàgores (2a part)

En aquesta part de l'activitat es demana que apliquin els coneixements adquirits per resoldre el repte: conèixer quant mesuren els costats de totes les peces del tangram.

Activitat 6: Autoavaluació i coavaluació

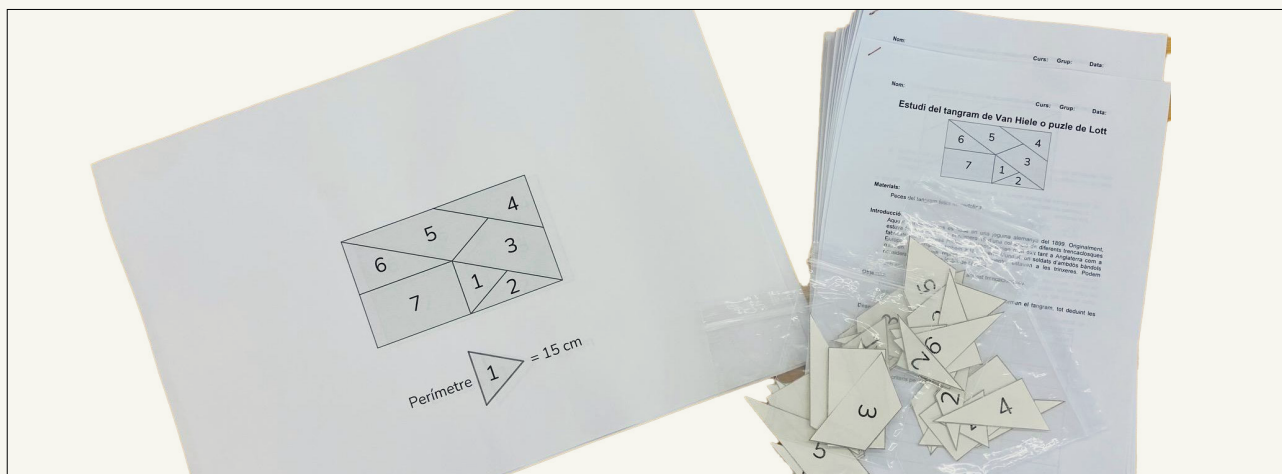
Per al docent,
recomanacions per
a l'acompanyament
i gestió de l'activitat



Sessió 1

ACTIVITATS INICIALS

El material necessari és el full DIN A3 amb el tangram, les peces fetes de cartolina (o qualsevol altre material) i la fitxa de treball “Estudiem el tangram de Van Hiele”.



Què observem?

- Que hi ha un rectangle format per 7 figures geomètriques:
- La 1 és un triangle equilàter
- La 2 un triangle isòceles.
- La 3 un trapezi.
- La 4 un triangle escalé.
- La 5 un quadrilàter irregular.
- La 6 és exactament igual que la 4.
- La 7 és un rectangle
- La 1 i la 2 fan la forma de la 6 i la 4 (que són iguals).
- Si dividim el rectangle en dos ens queden dos parts:
- La de l'esquerra formada per les figures 6, 7, 1 i 2.
- La de la dreta formada per les figures 5, 4 i 3.

Quines preguntes ens venen al cap?

- Per a què necessitem el perímetre del polígon 1?
- Quin seria el perímetre total de rectangle?
- Com calculen el perímetre total a partir del polígon 1?
- És necessària l'àrea per a trobar el perímetre?
- Les figures 6 i 4 són iguals?

Activitat 1

Què observes i quines preguntes et venen al cap

Activitat d'escalfament. L'alumnat treballa en grups de quatre persones per tal de compartir idees. Deixem 10 minuts perquè puguin anotar al full què observen i quines preguntes els venen al cap. Durant aquests 10 minuts el professor o la professora va passant pels diferents grups observant què escriuen i resolent dubtes. Si no hi estan acostumats, el fet que se'ls demani a ells que es facin les preguntes pot sorprendre'ls i inicialment els pot costar. Després es fa una posada en comú en gran grup de 5 minuts on un portaveu de cada grup explica el que han anotat al full.

Hi haurà grups que es quedaran en aspectes superficials i només descriuran els polígons que hi veuen, i d'altres aniran més enllà buscant relacions entre figures. És important que a la posada en comú tots els grups hi tinguin veu, començant pels que tenen arguments més pobres, que es podran completar amb les intervencions dels altres grups. D'aquesta manera tots tindran alguna cosa a dir.

Activitat 2

Estudi del tangram de Van Hiele

El treball es fa en grups de quatre per tal de compartir idees, però els lliuraments de les fitxes de treball seran individuals. Per al treball en grup es pot fer servir la tècnica 1-2-4.

En els primers apartats es demana que identifiquin quins polígons veuen al tangram i que pensin com es poden classificar i ho facin. Hi pot haver algun grup que no tingui clar què vol dir classificar. En aquest cas es pot dir que han d'agrupar els polígons segons alguna característica comuna i posar-los algun exemple.

Hi haurà grups que faran una classificació només entre triangles i quadrilàters, mentre que d'altres filaran més prim.

b) Busqueu criteris per classificar-los i classifiqueu-los.

Triangles:

COSTATS

- Equilàter: 1
- Isòceles: 2
- Escalè: 6 i 4

ANGLES

- Rectangle: 6 i 4
- Obtusangle: 2
- Acutangle: 1

b) Busqueu criteris per classificar-los i classifiqueu-los.

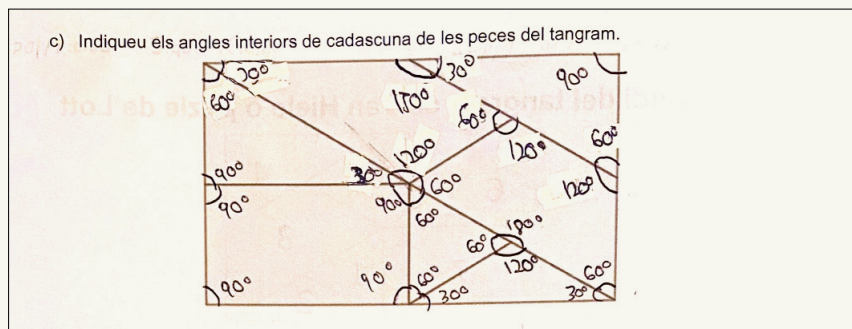
Si classifiquem en funció dels costats tenim els quadrilàters i els triangles (equilàter, isòceles i escalè). En funció dels angles tenim quadrilàters (trapezi i rectangle) i triangles (acutangle, rectangle i obtusangle).

1. Triangle equilàter acutangle
2. Triangle isòceles obtusangle
3. Quadrilàter trapezi isòceles
4. Triangle escalè rectangle
5. Quadrilàter trapezi
6. Triangle escalè rectangle
7. Quadrilàter rectangle

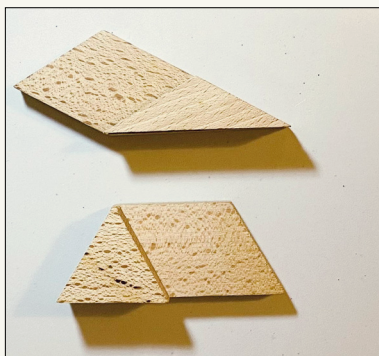
A l'apartat c) es demana que indiquin el valor dels angles interiors de tots els polígons. Un error bastant comú és posar que l'angle de 60° del triangle rectangle és de 45° . El professor o la professora, si veu l'errada, pot preguntar per què pensen que és de 45° . Una resposta freqüent és que al quadrat és així. Llavors una pregunta que els pot ajudar a adonar-se de l'errada és plantejar-los quines són les diferències entre els quadrats i els rectangles.

Tots els grups solen començar indicant els angles rectes però n'hi ha que, un cop fet això, es queden encallats. En aquests casos es pot donar la indicació que segueixin buscant els angles del triangle equilàter.

Sessió 1

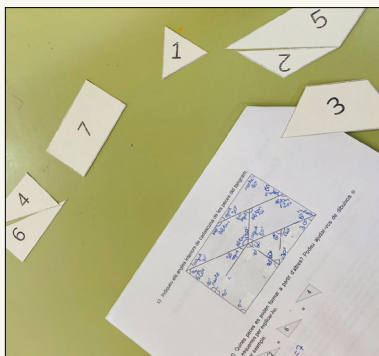


El fet de tenir les peces pot ajudar a identificar angles iguals, superposant les figures.



A l'apartat següent es demana quines figures es poden formar a partir de les altres. Potser alguns grups necessitaran l'aclariment que volem la mateixa forma i mida. És freqüent que algun grup busqui només la forma i trobi figures semblants (per exemple, amb les peces 1, 2, 6 i 7 es poden fer peces amb la mateixa forma que la 6 i 4), que pot resultar interessant per ampliar el treball de l'activitat però que no és un objectiu inicialment proposat.

Les peces de cartolina són clau per respondre aquest apartat i que tot l'alumnat tingui opcions de trobar les solucions.



Una pregunta interessant és si han trobat totes les possibilitats i, en cas de resposta afirmativa, preguntar-los com saben que no els en falta cap.

Pot resultar útil representar a la pissarra les diferents possibilitats que van trobant els grups, per tal de descobrir totes les opcions possibles conjuntament entre tot el grup.

L'alumnat troba diferents formes per donar la resposta, fent dibuixos i esquemes o utilitzant símbols matemàtics.

d) Quines peces es poden formar a partir d'altres? Podeu ajudar-vos de dibuixos o esquemes per explicar-ho.

Per exemple:

The diagram shows a triangle with a vertical side of length 6. A horizontal line segment is drawn from the top vertex to the vertical side, dividing it into two segments of length 1 and 2. This creates two smaller triangles. To the right, there is an equals sign followed by a triangle with a vertical side of length 4.

$6 + 4 = 7$

$2 + 1 = 4$

$6 + 1 = 5$

$4 + 2 = 3$

$6 + 1 + 2 = 7$

d) Quines peces es poden formar a partir d'altres? Podeu ajudar-vos de dibuixos o esquemes per explicar-ho.

Per exemple:

The diagram shows a large triangle divided into two smaller triangles by a line from the top vertex to the base. The top triangle is labeled '1' and the bottom triangle is labeled '2'. The entire large triangle is labeled '6'. The top triangle is also labeled '4'.

Sessió 1

Tot seguit es demana quina fracció respecte a la superfície total del tangram representa cada una de les peces. Normalment l'alumnat troba dificultats en explicar el perquè i ho justifica dient que "ja es veu". Se li ha de demanar que faci l'esforç per trobar les paraules.

e) Indiqueu quina fracció respecte la superfície total del tangram representa cadascuna de les peces.

Peça	Fracció respecte la superfície total
	$\frac{1}{16}$ perquè és la meitat d' $\frac{1}{8}$
	$\frac{1}{16}$ perquè és la meitat d' $\frac{1}{8}$
	$\frac{3}{16}$ perquè és la 1,3 vegades
	$\frac{1}{8}$ perquè és la meitat d' $\frac{1}{4}$
	$\frac{3}{16}$ si sumes la 6 i la 1 que fanen la 3/16
	$\frac{1}{8}$ perquè és la meitat d' $\frac{1}{4}$
	$\frac{1}{4}$

Peça	Fracció respecte la superfície total
	$\frac{1}{16}$ necessitem 2 de la 1 per fer una de la figura 4.
	$\frac{1}{16}$ necessitem 2 de la 2 per fer una de la figura 4.
	$\frac{3}{16}$ necessitem 3 de la 1 per fer-la.
	$\frac{1}{8}$ $\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{4}$ del total (7) = $\frac{1}{8}$
	$\frac{3}{16}$ necessitem una de la 4 i una de la 1 per fer-la.
	$\frac{1}{8}$ $\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{4}$ del total (7) = $\frac{1}{8}$
	$\frac{1}{4}$ Es veu que és $\frac{1}{4}$ del total.

A l'apartat següent se'ls demana com es pot comprovar que les fraccions són correctes. Un altre cop posem el focus perquè justifiquin el que fan.

- f) Com pots comprovar que no hi ha cap errada a l'apartat anterior? Comprova-ho.
- Puc comprovar-ho sumant totes les fraccions. Si dona 1 estarà bé*

$$\frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{3}{16} + \frac{2}{16} + \frac{3}{16} + \frac{2}{16} + \frac{4}{16} = 1 //$$

Tot seguit se'ls demana que trobin dues peces que tinguin la mateixa superfície però diferent perímetre. O bé superposant les peces de cartolina o bé amb les fraccions que han trobat als apartats anteriors és senzill trobar dues peces d'igual superfície. El que no és immediat és que justifiquin que el perímetre és diferent. Si veiem que algun grup no va pel camí recomanable podem induir-los a revisar el que estan fent amb preguntes del tipus: esteu segurs que és així?, per què

Sessió 1

penseu que aquestes dues mesures són iguals?, i si us feu un esquema amb les dades? quines són les mesures que sabem del cert?, i si agafeu les peces i les superposeu? Potser us ajuda...

Hi ha alumnes que fan bones observacions, però no acaben de justificar-ho. A l'exemple següent podríem demanar: com saps que el perímetre de la figura 1 és més petit que el de la figura 2?

- g) Agafeu dues peces que tinguin la mateixa superfície però diferent perímetre. Com sabeu que tenen la mateixa superfície però diferent perímetre? Expliqueu-ho de forma raonada.

La peça 1 i 2. Sé que tenen la mateixa superfície perquè les dos ocupen $\frac{1}{16}$ part del rectangle total però tenen perímetres diferents perquè els costats són diferents. El perímetre de la figura 1 és més petit que el de la figura 2.

Un exemple similar amb l'explicació una mica més acurada seria el següent:

- g) Agafeu dues peces que tinguin la mateixa superfície però diferent perímetre. Com sabeu que tenen la mateixa superfície però diferent perímetre? Expliqueu-ho de forma raonada.

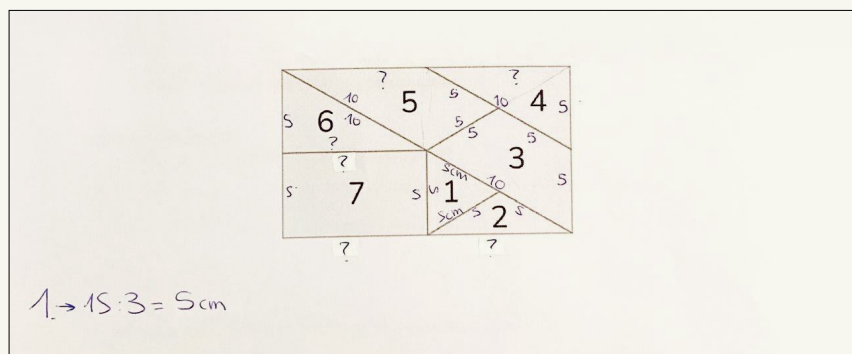
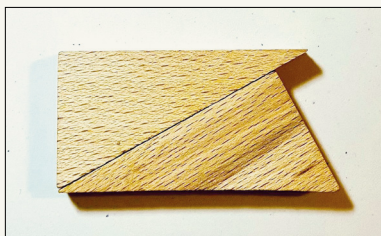
La 1 i la 2 tenen la mateixa superfície perquè si les superposem:  ens coincideixen la meitat de les dues. Sabem que no tenen el mateix perímetre perquè el triangle 1 té de costats 5, 5 i 5 i el 2 té 5, 5 i $\sqrt{5}$.

Finalment, se'ls demana que trobin les mesures de tots els costats dels polígons del tangram, tenint en compte que el perímetre del triangle equilàter és de 15 cm.

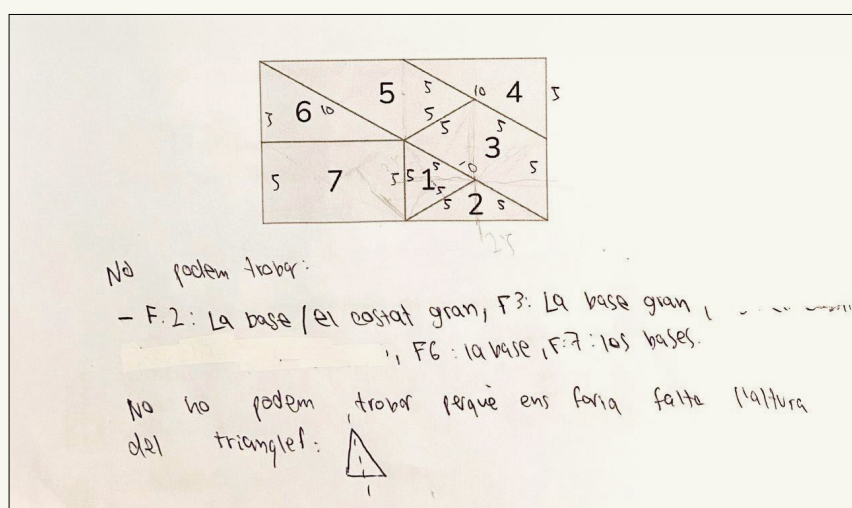
Els grups que volen acabar ràpid diran que els triangles rectangles tenen dos costats de 10 cm. La professora o el professor els haurà de guiar perquè vegin que no és possible; encara no saben que en un triangle rectangle la hipotenusa sempre és més gran que els catets, però ho poden deduir

Sessió 1

observant el dibuix del tangram o superposant les peces. Una manera molt clara perquè ho vegin és proposar-los que agafin els dos triangles rectangles i comparin longituds.



És important remarcar que expliquin el perquè de les seves conclusions.



Sessió 2

ACTIVITAT DE DESENVOLUPAMENT

El material necessari és la fitxa de treball i geoplans de trama quadrada (poden ser físics, en línia o impresos en paper) per a l'alumnat i la presentació per al professorat.

Activitat 3

Quadrats inclinats

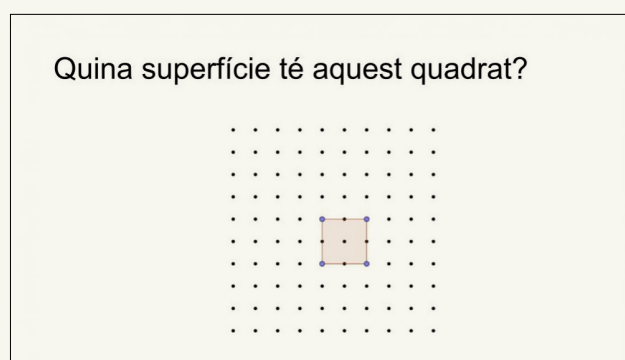
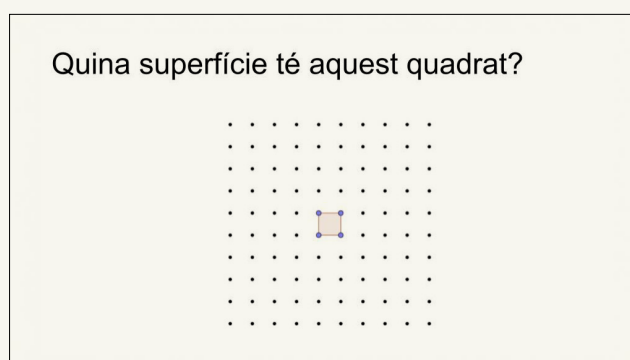
L'alumnat segueix treballant en grups de quatre, com a la sessió anterior.

Calcular la superfície d'un quadrat acostuma a ser senzill. Amb aquesta activitat veurem que ens podem trobar casos on el càlcul no és immediat i descobrirem el Teorema de Pitàgores.

S'inicia l'activitat amb una **presentació**. És important que, a l'inici, l'alumnat encara no tingui la fitxa de treball ni els geoplans per tal d'evitar distraccions.

A la presentació es fan un seguit de preguntes que en gran grup anirem responnent. Hi ha alumnat que mai no ha treballat amb geoplans i és important deixar clar que la unitat de longitud és la distància entre punt i punt (ens podem trobar alumnes que, en comptes de la distància entre punts, compti els punts).

Les primeres preguntes són senzilles de respondre. És un bon moment per donar veu a aquell alumnat que normalment presenta alguna dificultat o té por de participar:

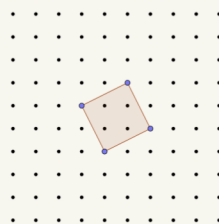


Com en les activitats anteriors, no ens conformem amb un resultat correcte, demanem el perquè.

La pregunta següent té més dificultat i serà el fil conductor de tota la sessió:

Sessió 2

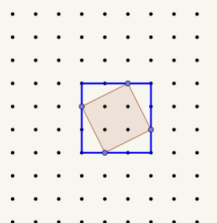
Quina superfície té aquest quadrat?



El fet que el quadrat estigui inclinat dificulta el càlcul a primera vista. Normalment una de les respostes que donen és que la superfície és 4 perquè, encara que el quadrat estigui inclinat, el costat és dos. Llavors preguntem: esteu segurs que és 2?, i en gran grup busquem la resposta a per què no és 2. Alguns alumnes recorden l'últim apartat de l'activitat de la sessió anterior.

Després de veure que no és 2, és l'hora de buscar estratègies per trobar la superfície. Deixem 5 minuts perquè cada grup parli i busqui opcions i, si veiem que els costa, projectem la següent diapositiva de la presentació:

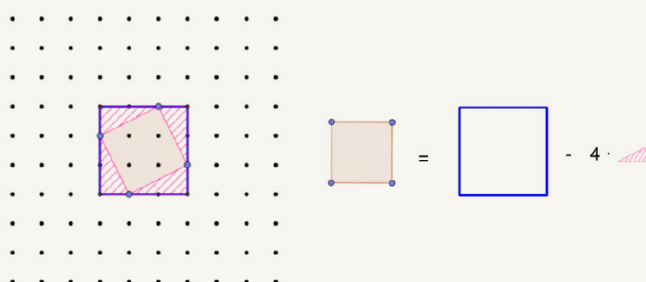
Quina superfície té aquest quadrat?



Els preguntem si ara tenen alguna idea i deixem uns minuts perquè ho parlin amb els companys.

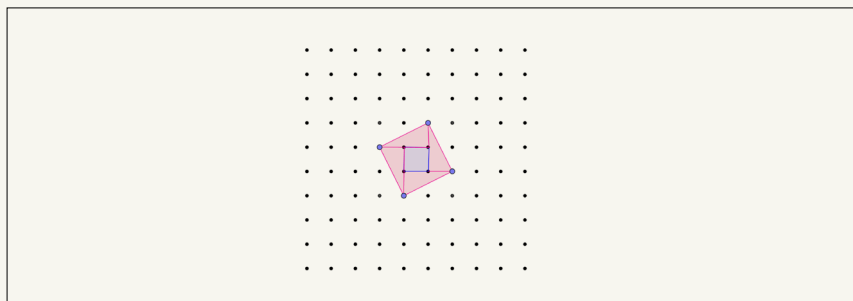
Una possible estratègia és la que hi ha a continuació a la presentació:

Quina superfície té aquest quadrat?



Sessió 2

N'hi ha d'altres d'interessants que si no surten a classe val la pena de comentar, com ara fer el càlcul de la superfície del quadrat interior i sumar-hi 4 triangles rectangles:



Per tal de poder seguir l'activitat posarem nom als diferents quadrats inclinats. Projectem la diapositiva següent i els demanem que conjeturin el perquè del nom de cada quadrat:

Posem nom als quadrats



Quadrat (1,1)



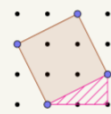
Quadrat (2,1)

Cada quadrat està definit per una parella de nombres referits al triangle rectangle sobre el qual s'ha format el quadrat. El primer nombre és la base del triangle i el segon, l'altura.



Quadrat (1,1)

El quadrat es construeix a partir d'un triangle rectangle de base 1 i altura 1



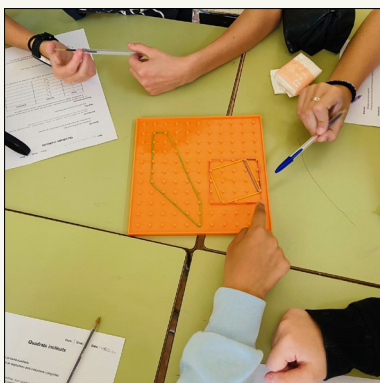
Quadrat (2,1)

El quadrat es construeix a partir d'un triangle rectangle de base 2 i altura 1

Un cop tots tenim clar com anomenar els quadrats inclinats, donem la fitxa de treball a cadascú i un geoplà per grup.

A cada grup li correspondrà calcular la superfície d'un quadrat inclinat diferent. Poden representar la situació al geoplà per visualitzar-la i fer més fàcil el càlcul. Després posarem en comú tots els resultats i emplenarem la taula de la fitxa.

Sessió 2



b) Posada en comú

Grup	Quadrat	Superfície
1	(3,1)	10
2	(4,1)	17
3	(5,1)	26
4	(6,1)	37
5	(7,1)	50
6	(8,1)	65

Un cop s'ha fet la posada en comú deixem 10 minuts per fer els tres apartats següents. Després comentarem les troballes en gran grup amb la intenció que cap grup no es quedi endarrerit; és important arribar a l'apartat e) amb tot ben entès.

Hi ha alumnes que expressen verbalment la troballa:

Desenvolupament:

- a) En un geoplà de trama quadrada, cadascun dels grups de la classe ha de construir el quadrat de la fila corresponent a la taula de sota i calcular-ne la superfície.

Grup	Quadrat	Superfície
1	(3,1)	10cm ²
2	(4,1)	17cm ²
3	(5,1)	26cm ²
4	(6,1)	37cm ²
5	(7,1)	50cm ²
6	(8,1)	65cm ²

$$\frac{6 \cdot 1}{2} = 3$$

$$3 \cdot 4 = 12$$

$$7 \cdot 7 = 49$$

$$49 - 12 = 37$$

- b) Poseu les dades de tots els grups en comú amb la finalitat de completar la taula anterior. Què observeu?

Multipliquem el primer número del parèntesis per ell mateix i li sumem l'1

- c) Quina superfície penseu que tindrà el quadrat (8,1)? Per què?

$$82 \text{ pg } (9,1) \rightarrow 9 \cdot 9 = 81 + 1 = 82$$

- d) Imaginem ara que construïm el quadrat a partir d'un triangle (a,1) on a és un nombre qualsevol. Escriu una expressió que representi la superfície del quadrat.

$$A = a^2 + 1$$

Sessió 2

I n'hi ha d'altres que fan servir llenguatge algebraic:

- b) Poseu les dades de tots els grups en comú amb la finalitat de completar la taula anterior. Què observeu?
*Quan el quadrat té els dos nombres senars el resultat es parell
 i quan té un nombre senar i un parell el resultat es senar.
 Ara multipliquem el primer nombre per el mateix i sumem el seu 1.*
- c) Quina superfície penseu que tindrà el quadrat (9,1)? Per què?
serà 82 perquè $9 \cdot 9 = 81 + 1 = 82$
- d) Imaginem ara que construïm el quadrat a partir d'un triangle (a,1) on a és un nombre qualsevol. Escriu una expressió que representi la superfície del quadrat.

$$S = a^2 + 1$$

Ara se'ls demana que, sense fer cap tipus de càlcul, conjecturin quina serà la superfície d'un quadrat construït sobre un triangle rectangle d'altura 2. La majoria de respostes acostumen a ser que es multiplica la base del triangle per ell mateix i se suma 2 (el raonament que donen és que si abans sumàvem 1, ara sumarem 2):

- e) Si ara construïm quadrats a partir de triangles (3,2) o (4,2), què creieu que passarà?
 Quina penseu que serà la superfície d'aquests quadrats? Conjectureu què pot passar.
El primer número el multipliquem per ell mateix i després li sumem 2
 $(3,2) = 3 \cdot 3 + 2 = 11$

- e) Si ara construïm quadrats a partir de triangles (3,2) o (4,2), què creieu que passarà?
 Quina penseu que serà la superfície d'aquests quadrats? Conjectureu què pot passar.
 $S = 3 \cdot 3 + 2 = 11$ *Perquè si seguim la mateixa logica que al principi...*
 $S = 4 \cdot 4 + 2 = 18$ *haurien de fer*

Després els demanem que ho comprovin amb els geoplans i tornem a emplenar una taula com la de l'apartat a) però amb altura 2.

Posem els resultats en comú i deixem temps perquè observin què està passant. L'alumnat pot arribar a conjecturar una fórmula per al cas d'altura 2.

Sessió 2

f) Repetirem el que hem fet a l'apartat a) però amb triangles d'altura 2.

Grup	Quadrat	Superfície
1	(3,2)	13
2	(4,2)	20
3	(5,2)	29
4	(6,2)	40
5	(7,2)	53cm ²
6	(8,2)	68

Què observeu?

Que aquesta vegada, a més de sumar-li 1, se li suma 2^2
 $A = a^2 + 2^2$

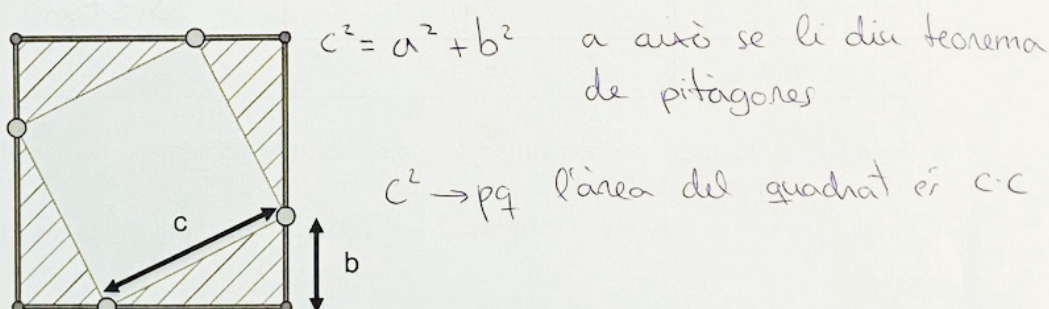
L'alumnat que té capacitat d'abstracció pot arribar a deduir una fórmula per al cas general abans que se li demani:

Què observeu?

Que si fem el quadrat del primer número i el quadrat del segon número i els sumem dona el resultat
 $S = x^2 + y^2$

A l'últim es demana que conjeturin una fórmula per al cas general, un quadrat construït sobre un rectangle de base a i altura b i arribin així al Teorema de Pitàgores:

g) Conjectureu com serà una fórmula per calcular la superfície d'un quadrat construït a partir d'un triangle (a,b) , on a i b són dos nombres qualsevol:



Sessió 2

En aquesta activitat, la professora o el professor té diferents rols. En la primera part, ha de guiar l'alumnat amb el suport de la presentació, fent-los més preguntes que donant-los respostes. En la segona part té un paper més passiu, ha de deixar que els grups vagin arribant a conclusions i conjecturin per ells mateixos, tenint molta cura que cap grup no es quedi despenjat. Per això és clau parar molta atenció a les converses que l'alumnat té mentre treballa d'una manera autònoma i intervenir quan calgui a fi de reorientar-los cap a la direcció que ens interessa.

Sessió 3

ACTIVITAT DE SÍNTESI I ESTRUCTURACIÓ

El material necessari és la fitxa de treball de la primera sessió, emplenada.

Activitat 4

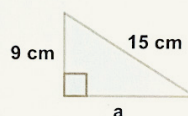
Aplicant el Teorema de Pitàgores

Per al treball en grup es pot fer servir la tècnica 1-2-4.

A la primera part d'aquesta activitat s'enuncia d'una manera formal el teorema i es donen exemples d'aplicació que l'alumnat haurà de reproduir. Per la tipologia de l'alumnat, quan aquesta activitat es va passar a l'aula es va optar per donar models de resolució, però una altra opció és no donar-los al començament, tenir-los preparats i donar-los només en cas necessari a aquells grups que ho requereixin.

Amb el model al davant, l'alumnat no acostuma a trobar dificultats per fer les tasques encomanades.

Sessió 3



Comencem enunciant el Teorema:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Substituïm la informació coneguda:

$$a^2 + 9^2 = 15^2$$

Calculem els quadrats:

$$a^2 + 81 = 225$$

Restem 81 dels dos costats de la igualtat per tal de tenir la incògnita aïllada:

$$a^2 + 81 - 81 = 225 - 81$$

Fem la resta:

$$a^2 = 144$$

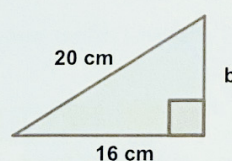
Fem l'arrel quadrada dels dos costats de la igualtat:

$$a = \sqrt{144}$$

Calculem:

$$a = 12 \text{ cm}$$

Ara us toca a vosaltres. Trobeu el costat desconegut del següent triangle:



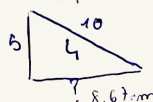
$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= c^2 \\ 16^2 + b^2 &= 20^2 \\ 256 + b^2 &= 400 \\ 256 - 256 + b^2 &= 400 - 256 \\ b^2 &= 144 \\ b &= \sqrt{144} = 12 \text{ cm} \end{aligned}$$

ACTIVITATS D'APLICACIÓ I TRANSFERÈNCIA

Activitat 5

En una segona part de l'activitat se'ls demana que apliquin allò que han après per respondre al repte proposat a la primera sessió: trobar les longituds de tots els costats de les peces del tangram de Van Hiele. Podem trobar diferents maneres d'explicar la resposta:

- d) Recupereu la fitxa anomenada Un tangram diferent. A l'últim apartat se us demanava quant mesuraven tots els costats de les peces. Ara tenim la informació i els coneixements necessaris per poder resoldre aquest repte. Detalleu a continuació tot el procediment.



$$\begin{aligned} b^2 &= \sqrt{10^2 - 8^2} \\ b^2 &= \sqrt{100 - 64} \\ b &= \sqrt{36} \\ b &= 6 \end{aligned}$$

La figura 4 és igual a la 6, això vol dir que el costat que ens faltava de la 6 (que és el mateix del rectangle) també dona 8,66: com que la base del rectangle és la meitat del rectangle gran, l'altra base, és a dir, la base del triangle 2 també és 8,66. El costat que ens faltava de la figura 5 també ocupa la meitat del rectangle gran i, per tant, també és de 8,67.

Sessió 3

- d) Recupereu la fitxa anomenada Un tangram diferent. A l'últim apartat se us demanava quant mesuraven tots els costats de les peces. Ara tenim la informació i els coneixements necessaris per poder resoldre aquest repte. Detalleu a continuació tot el procediment.



$$10^2 = 5^2 + a^2$$

$$100 = 25 + a^2$$

$$100 - 25 = 25 - 25 + a^2$$

$$75 = a^2$$

$$a = \sqrt{75} = 8,7 \text{ cm}$$

Tots els costats que ens feien falta són iguals per tant hem buscat la de algun d'ells en este cas la 6 i ens la donat 8,7cm que es el costat de tots els que feien falta.

- d) Recupereu la fitxa anomenada Un tangram diferent. A l'últim apartat se us demanava quant mesuraven tots els costats de les peces. Ara tenim la informació i els coneixements necessaris per poder resoldre aquest repte. Detalleu a continuació tot el procediment.



$$c^2 = b^2 + a^2$$

$$100 = b^2 + 25$$

$$10^2 = b^2 + 5^2$$

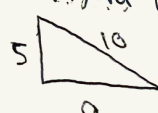
$$b^2 = 100 - 25 = 75$$

$$b = \sqrt{75} = 8,7 \text{ cm}$$

La base del rectangle és de 17,3 cm ($8,7 \cdot 2$). La base dels triangles 6, 4, 2 és de 8,7cm. La base de rectangle 7 és de 8,7cm.

- d) Recupereu la fitxa anomenada Un tangram diferent. A l'últim apartat se us demanava quant mesuraven tots els costats de les peces. Ara tenim la informació i els coneixements necessaris per poder resoldre aquest repte. Detalleu a continuació tot el procediment.

Figura 6 i 4:

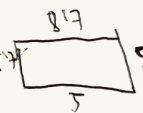


$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$a^2 + 5^2 = 10^2$$

$$a^2 + 25 = 100$$

$$a^2 = 100 - 25$$

$$a = \sqrt{75} = 8,7 \text{ cm}$$


F. 2



F. 5:



Sessió 3

Activitat 6

Autoavaluació i coavaluació

De manera individual han d'emplenar el full de coavaluació i autoavaluació. Es planteja de fer-ho de virtualment mitjançant l'entorn virtual de treball de l'aula, que és la manera habitual de fer-ho amb el grup que ha fet l'activitat, però també es pot passar el document imprès.

En primer lloc, se'ls fa valorar el treball en equip:

	Excel·lent 3 punts	Notable 2 punts	Satisfactori 1 punt	No assolit 0 punts	Punts
Com creus que ha funcionat el grup	Súperbé, hem anat tots a l'una	Molt bé, ens hem organitzat bé	Prou bé, hem anat fent	No massa bé, i ens han quedat coses per fer	2
Implicació del grup	Tot el grup s'hi ha implicat	Tots hi hem col·laborat però de diferents maneres	Gairebé tothom s'hi ha implicat i ha fet les seves tasques	Només una part del grup s'hi ha implicat	2
Discussions per prendre acords	Tothom ha dit la seva i hem arribat a un acord fàcilment	Hem dit tots la nostra i ens ha costat una mica arribar a l'acord	Hem dit tots la nostra, però ens ha costat arribar a un acord	Hem dit tots la nostra, però no hem arribat a un acord comú	3
Autonomia del grup	Els problemes s'han resolt al grup i per part de tots	Gairebé sempre hem trobat les solucions sols	S'ha necessitat ajut de la professora només algunes vegades	Hem necessitat ajut de la professora continuament	3
Coavaluació	Es fa de manera crítica i responsable	Es fa de manera prou crítica i prou responsable	Es fa de manera poc crítica i/o poc responsable	No es fa de manera crítica ni responsable	3
TOTAL					13

Després es fan preguntes sobre allò que han après i com s'han sentit al llarg de la seqüència. A continuació hi ha alguns exemples de respostes.

Sessió 3

- Si haguessis d'explicar a un amic o a una amiga què t'ha agradat més de l'activitat, què li diries?

El que més m'ha agradat és poder comprovar el teorema de Pitàgores i saber d'on surt la fórmula $a^2+b^2=c^2$

- Què t'ha resultat més fàcil? I més difícil?

El que em va resultar més fàcil, va estar expressar les figures al geoplà, ja que em va semblar molt entretingut i ho vaig entendre de seguida, en canvi, el que em va resultar més difícil va estar esbrinar els graus de les figures del rectangle, perquè em va costar bastant fer-ho.

- Què t'ha resultat més fàcil? I més difícil?

El més fàcil m'ha resultat aplicar el teorema de Pitàgores i el més difícil ha sigut entendre per què a l'apartat h de la fitxa del tangram no podíem trobar la base del rectangle total.

- Què t'ha resultat més fàcil? I més difícil?

El que m'ha resultat més difícil ha sigut representar la fracció respecte a la superfície total de la fitxa 1, ja que no entenia ben bé al que es referia.

El que m'ha resultat més fàcil ha sigut aplicar el teorema de Pitàgores amb els exemples que ens donaven.

La major part d'alumnes va coincidir que la part més fàcil de la seqüència havia estat aplicar el Teorema de Pitàgores amb els models resolts al davant. També majoritàriament van remarcar que una de les principals dificultats que van trobar va ser haver de justificar totes les troballes, ja que els costava trobar les paraules adients per explicar-se bé, i aquest va ser un dels objectius de millora per part de la professora de cara al plantejament d'activitats futures: plantejar més activitats on l'alumnat hagi de comunicar de manera explícita.

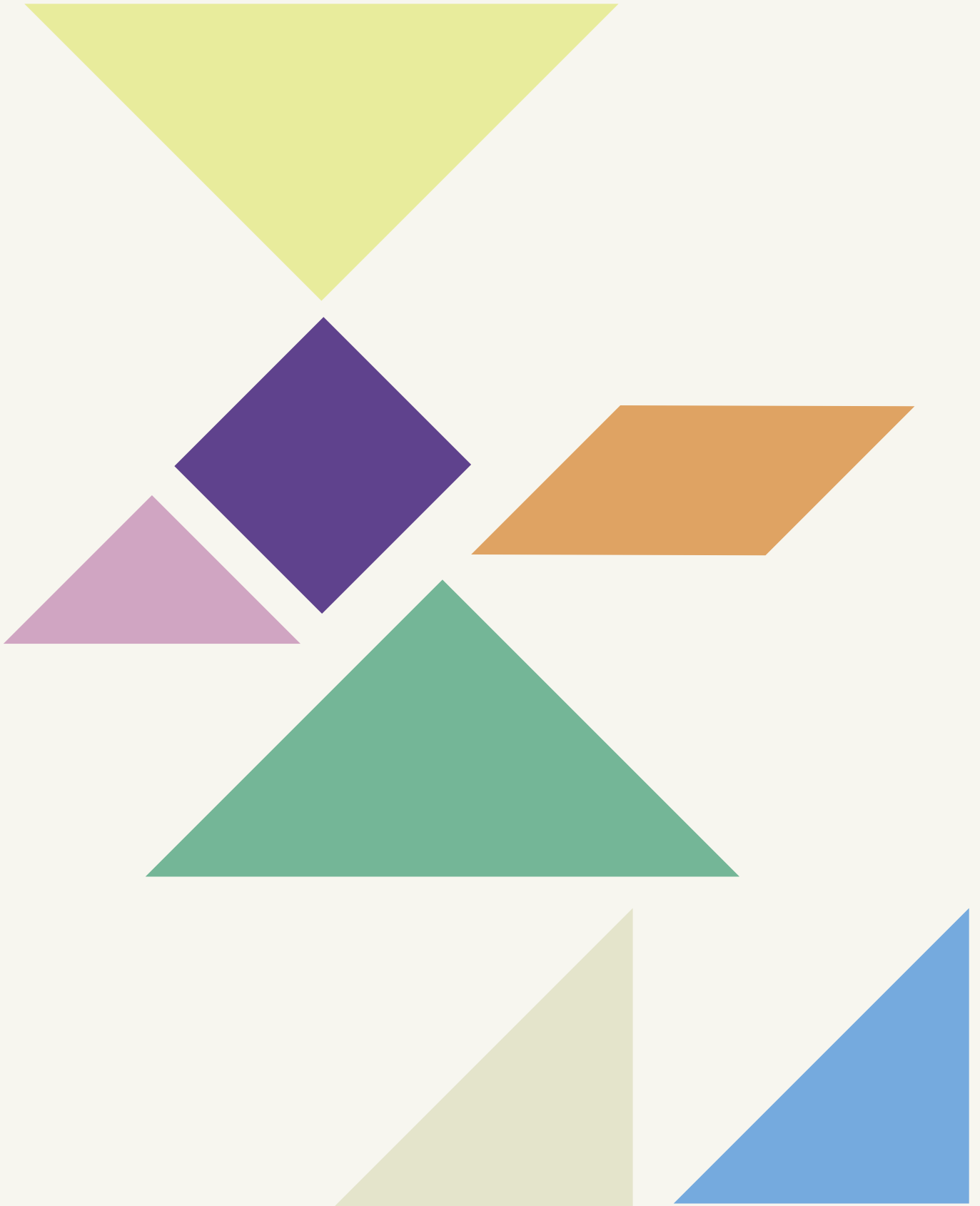
Indicacions sobre seguiment i avaluació

Per tal de fer el seguiment, el professor o la professora recull totes les fitxes de treball en acabar les tres sessions i les valora. D'aquesta manera sap en quin punt està cada alumne/a i si s'han assolit els objectius proposats. Un cop revisades les fitxes, es dedica part d'una sessió perquè l'alumnat pugui veure les correccions i els comentaris de la professora o el professor.

L'activitat 6 (autoavaluació i coavaluació) també dona informació sobre com s'ha treballat i si s'han assolit els objectius.

Aquesta seqüència es passa a l'alumnat al 3r trimestre, quan el professorat i l'alumnat ja es coneixen de tot el curs i l'estudiant sap què espera el professor o la professora: que les fitxes de treball estiguin completes, amb els raonaments ben explicats i que siguin propis, no de cap companya o company de grup.

Recursos adicionales,
elements organitzatius
i elements curriculars



Connexions

Aquesta activitat connecta diversos sabers del currículum. D'una banda, a la primera sessió s'estableixen connexions amb el sentit numèric a través del treball de les fraccions i amb el sentit espacial pel que fa a la classificació dels polígons i la determinació d'angles. De l'altra banda, a la segona i tercera sessió es connecta amb el sentit algebraic, identificant patrons i resolent equacions senzilles.

Referències

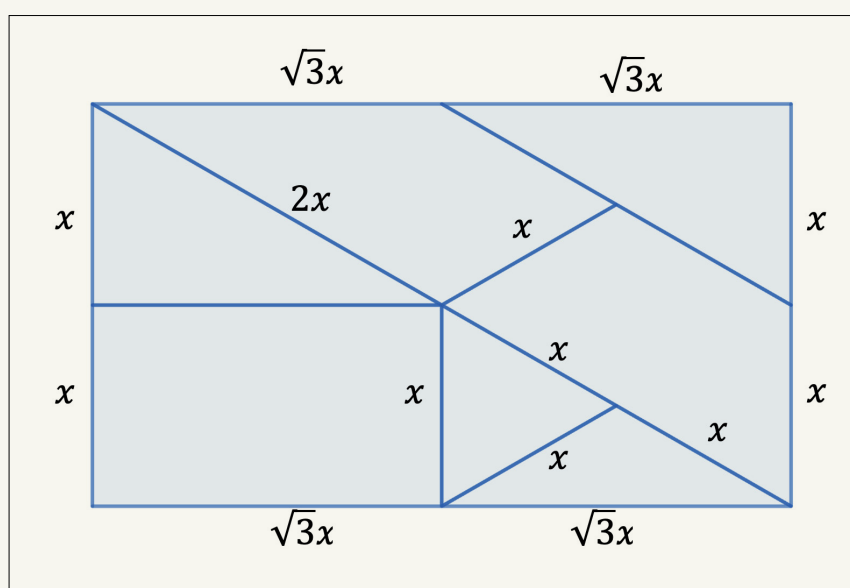
L'activitat de la segona sessió, "Quadrats inclinats", està basada en l'activitat de l'NRICH "[Tilted Squares](#)".

Recursos addicionals

- Hi ha moltes activitats interessants per treballar amb diferents tangrams:
 - [Campanya Laboratori de matemàtiques del CREAMAT](#) amb activitats sobre el tangram clàssic.
 - Activitats amb el [Tangram mínim de Brügner](#), del web de Joan Jareño Calaix +ie.
 - [Campanya Impressió amb 3D del CREAMAT](#) amb activitats sobre el tangram de 8 elements.
- Activitats interessants amb geoplans:
 - [Campanya Laboratori de matemàtiques del CREAMAT](#) amb activitats sobre geoplans.
 - Problemes de geoplans amb trama isomètrica a l'[ARC](#).
- Activitats amb context històric:
 - El Teorema de Pitàgores a la Xina antiga ([ARC](#)).
 - El Teorema de Pitàgores a la Grècia clàssica ([ARC](#)).

Com s'estira l'activitat

- En lloc que l'alumnat dibuixi les peces a la matèria de tecnologia amb el Tinkercad, es pot fer a la matèria de matemàtiques i que construeixi el tangram amb el GeoGebra. Amb alumnat de 2n d'ESO seria senzill fent servir la graella isomètrica. Amb alumnat de cursos superiors es podria plantejar l'activitat amb la graella principal i construir-lo tenint en compte que el rectangle exterior tindrà base radical.
- Amb el tangram de Van Hiele es poden treballar les figures convexes, tal com ens proposen fer al bloc del PuntMat amb el tangram clàssic amb l'activitat Polígons convexos & tangram.
- També a 2n d'ESO es poden plantejar activitats de proporcionalitat geomètrica i semblança aprofitant el tangram de Van Hiele, demanant figures semblants a partir de les diferents peces i calculant raons entre longituds i raons entre àrees.
- Una possible ampliació per a cursos més elevats seria deduir com trobar ternes pitagòriques pensant en nombres quadrats consecutius i en termes de paritat, i trobar-ne algunes amb l'ajuda de programari com ara el full de càlcul.
- Amb alumnat de 4t d'ESO es pot aprofitar el tangram per treballar nombres radicals, buscant el perímetre de cada peça en funció del costat del triangle equilàter i treballar amb arrels:



Elements organitzatius

Nivell: 2n d'ESO

Temporització: 3 sessions

Agrupament: el treball es fa en grups de quatre per tal de compartir idees, però els lliuraments de les fitxes seran individuals.

Material: les activitats proposades necessiten diversos materials:

- Fitxes de treball
- Geoplans
- Peces del tangram en cartolina
- Ordinador

Elements curriculars

Competències específiques

C1. Interpretar, modelitzar i resoldre situacions de la vida quotidiana, pròpies de les matemàtiques i d'altres àmbits del coneixement, aplicant diferents estratègies i formes de raonament per explorar procediments i obtenir solucions.

C3. Formular conjectures senzilles o problemes, utilitzant el raonament i l'argumentació, la creativitat i les eines tecnològiques, per integrar i generar nou coneixement matemàtic.

C5. Connectar diferents elements matemàtics relacionant conceptes, procediments, arguments i models per desenvolupar una visió de les matemàtiques com un tot integrat.

C7. Comunicar i representar, de manera individual i col·lectiva, conceptes, procediments i resultats matemàtics usant el llenguatge oral, escrit, gràfic, multimodal i la terminologia matemàtica apropiada, per donar significat i permanència a les idees matemàtiques.

C9. Desenvolupar destreses socials, com la cooperació, participant activament en equips de treball inclosius reconeixent la diversitat i el valor de les aportacions dels altres, per compartir i construir coneixement matemàtic de manera col·lectiva.

Elements curriculars

Sabers

Sentit de la mesura

→ Mesurament

- Deducció, interpretació i aplicació de les principals estratègies per obtenir longituds, àrees i volums en figures planes i tridimensionals.
- Relació entre les aplicacions dels teoremes de Tales i de Pitàgores en els diferents contextos històrics en què s'han utilitzat (Grècia, Índia, Xina).

→ Estimació i relacions

- Formulació de conjectures sobre mesures o relacions entre aquestes basades en estimacions.

Sentit espacial

→ Formes geomètriques de dues i tres dimensions

- Descripció i classificació de formes geomètriques planes i tridimensionals en funció de les seves propietats o característiques.

Sentit algebraic

→ Model matemàtic

- Modelització i resolució de problemes contextualitzats, també de la vida quotidiana, secundant-se en representacions matemàtiques i en el llenguatge algebraic.

Sentit socioemocional

→ Treball en equip i presa de decisions

- Ús d'estratègies de gestió i presa de decisions adequades per resoldre situacions pròpies del treball en equip.

Elements curriculars

Criteris d'avaluació

1. Interpretar el problema plantejat organitzant-ne la informació donada i comprenent les preguntes formulades.
2. Obtindre la solució al problema plantejat movilitzant els coneixements de càlcul d'àrees i perímetres i aplicant el Teorema de Pitàgores.
3. Fer conjectures matemàtiques de manera i raonada per descobrir per ells sols el Teorema de Pitàgores.
4. Reconèixer relacions entre les superfícies de les peces del tangram i la fracció que representen aquestes peces respecte a la superfície total del trencaclosques i aconseguir tenir una visió integrada de les matemàtiques.
5. Comunicar i representar les troballes respecte al càlcul de perímetres i l'aplicació del Teorema de Pitàgores utilitzant el llenguatge matemàtic adequat per descriure els raonaments, procediments i conclusions que els han portat a resoldre el repte plantejat.
6. Col·laborar activament amb els altres, arribant a acords i complint-los, per poder donar solució al repte (calcular la longitud dels costats de les peces del tangram aplicant, si fa falta, el Teorema de Pitàgores), valorant l'èxit col·lectiu com una estratègia de millora personal.

Glossari

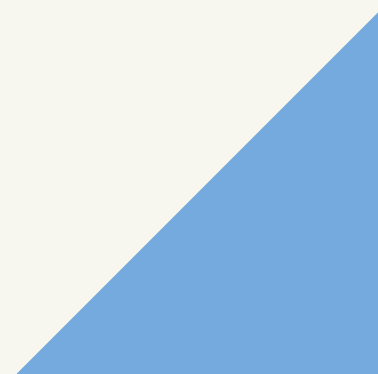
CATET. Costat dels que formen l'angle recte d'un triangle rectangle.

HIPOTENUSA. Costat d'un triangle rectangle oposat a l'angle recte.

TEOREMA DE PITÀGORES. Teorema segons el qual, en un triangle rectangle, l'àrea del quadrat que té per costat la hipotenusa és igual a la suma de les àrees dels quadrats que tenen per costat els catets. Si a i b representen les longituds dels catets i c la longitud de la hipotenusa, el Teorema de Pitàgores s'expressa per la igualtat $c^2 = a^2 + b^2$.

PERÍMETRE. Contorn d'una figura plana. Mesura d'aquest contorn.

ÀREA. Mesura d'una superfície compresa dintre un perímetre.



FLORENCE

PER A LA MILLORA DE LES MATEMÀTIQUES

